ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76.

Α2. α) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής (Ψ)

β) Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,2)\\ 3, & x\in(2,5)\end{cases}$ ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,2)\cup(2,5)$, ενώ η f δεν είναι σταθερή στο $(0,2)\cup(2,5)$.

Α3. Η συνάρτηση που παρουσιάζει ακρότατο (μέγιστο) στο x_0 είναι η *h*.

Α4. α) Σ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών και δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=xe^x-1$ και $f''(x)=(x+1)e^x$.

$$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x\geq 0 \overset{(e^x>0)}{\Leftrightarrow} x\geq -1$$

x	$-\infty$ -1 $+\infty$	
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$ και κυρτή στο $[-1,+\infty)$.

Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $\left(-1, f(-1)\right)$.

Β2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}e^x-\dfrac{x+1}{x}\right)=1\cdot(+\infty)-1=+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x}e^{x}-\frac{x+1}{x}\right)=1\cdot 0-1=-1$$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{x}-1\right)=0-1=-1,$$ γιατί

$$\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{x}\right)=0.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=-x-1$.

B3. Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και $f(1)\cdot f(2)=-2\cdot(e^{2}-3)<0$, οπότε από θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα, έστω x_1, στο διάστημα $(1,2)$.

Απ’ το B1. έχουμε ότι η f είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$ επομένως και στο $[1,2]$.

Για κάθε $x\in(1,2)$ έχουμε:

$$1<x<2\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(1)<f'(x)<f'(2)\Leftrightarrow e-1<f'(x)<2e^{2}-1,$$ οπότε είναι $f'(x)>0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,2)$ και το x_1 είναι μοναδική ρίζα.

Για το $-x_1$ έχουμε:

$$f(-x_1)=(-x_1-1)e^{-x_1}+x_1-1=\frac{-x_1-1}{e^{x_1}}+x_1-1=\frac{-x_1-1+(x_1-1)e^{x_1}}{e^{x_1}}=$$

$$\frac{f(x_1)}{e^{x_1}}=0.$$

B4. Για την f ισχύουν προφανώς οι προϋποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $[-x_1,x_1]$, επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi\in(-x_1,x_1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\left(\xi,f(\xi)\right)$ είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\int_{-1}^{f(0)} \frac{x^2-4}{x^2+1}dx - \int_{f(0)}^{-1} \frac{5}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{f(0)} \frac{x^2-4}{x^2+1}dx + \int_{-1}^{f(0)} \frac{5}{x^2+1}dx =$

$\int_{-1}^{f(0)} \frac{x^2-4+5}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{f(0)} 1dx = f(0)+1$, οπότε $f(0)+1=3 \Leftrightarrow f(0)=2$.

Για $x=-2$ έχουμε $f^2(-2)+(-2)^2=4 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(-2)=0$ και

για $x=2$ έχουμε $f^2(2)+2^2=4 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(2)=0$.

Για κάθε $x \in (-2,2)$ έχουμε $f^2(x)+x^2=4 \Leftrightarrow f^2(x)=4-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$.

Επίσης η f είναι συνεχής στο $(-2,2)$. Επομένως η f διατηρεί πρόσημο στο $(-2,2)$ και αφού $f(0)=2>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x \in (-2,2)$.

Επομένως για κάθε $x \in (-2,2)$ έχουμε

$f^2(x)+x^2=4 \Leftrightarrow f^2(x)=4-x^2 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4-x^2}$ και αφού

$f(-2)=f(2)=0$, ισχύει $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ για κάθε $x \in [-2,2]$.

Γ2. Για κάθε $x \in (0,2)$ ισχύει $f(-x)=\sqrt{4-(-x)^2}=\sqrt{4-x^2}=f(x)$.

Αφού οι τετμημένες των σημείων Α,Β και Γ,Δ είναι ίσες και οι τεταγμένες των σημείων Α,Δ και Β,Γ είναι ίσες, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Επίσης το μήκος του ΑΔ είναι $2x$ και το μήκος του ΑΒ είναι $f(x)$.

Επομένως το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι:

$\mathrm{E}(x)=2x \cdot f(x)=2x\sqrt{4-x^2}$, $x \in (0,2)$.

Γ3. Η συνάρτηση Ε είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$\mathrm{E}'(x)=\frac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$. Ο πίνακας μεταβολών της Ε είναι:

x	0	$\sqrt{2}$	2
$\mathrm{E}'(x)$	$+$	0	$-$
$\mathrm{E}(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Επομένως το εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x=\sqrt{2}$ και η μέγιστη τιμή του είναι $\mathrm{E}\left(\sqrt{2}\right)=4$ τ.μ.

Για $x \in (0,2)$: $\mathrm{E}(x)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2(4-x^2)=3 \Leftrightarrow ...$

$x=1$ ή $x=\sqrt{3}$.

Άρα για $x=1$ ή $x=\sqrt{3}$ το εμβαδόν παίρνει την τιμή $2\sqrt{3}$ τ.μ.

Γ4. Τη χρονική στιγμή, έστω t_0, κατά την οποία το εμβαδόν είναι ίσο με $2\sqrt{3}$ τ.μ., για πρώτη φορά, έχουμε $x(t_0)=1$ και $x'(t_0)=1$.

$\mathrm{E}(t)=2x(t)\cdot\sqrt{4-x^2(t)}$, οπότε

$\mathrm{E}'(t)=2x'(t)\cdot\sqrt{4-x^2(t)}+2x(t)\cdot\dfrac{-x(t)\cdot x'(t)}{\sqrt{4-x^2(t)}}$ και για $t=t_0$ έχουμε

$\mathrm{E}'(t_0)=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ τ.μ./sec .

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έστω ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,4)$, τότε αφού η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $[0,4]$, οπότε και στο $(0,4)$, διατηρεί πρόσημο στο $(0,4)$. Τότε:

αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,4)$, θα έχουμε $\int_0^4 f(x)dx>0$ ΑΤΟΠΟ

αν $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,4)$, θα έχουμε $\int_0^4 f(x)dx<0$ ΑΤΟΠΟ.

Επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Επίσης $f'([0,4])=[1,3]$, οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,4)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,4)$.

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

[2ος τρόπος λύσης για το ένα, τουλάχιστον: Rolle σε παράγουσα της f]

Δ2. Απ' το Δ1. έχουμε:

$x<x_0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_0)=0$ και $x>x_0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0)=0$.

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι 3 τ.μ., οπότε

$\int_0^{x_0}\left(-f(x)\right)dx=3\Leftrightarrow\int_0^{x_0}f(x)dx=-3$ (1)

Επίσης $\int_0^4 f(x)dx=0\Leftrightarrow\int_0^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^4 f(x)dx=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\int_{x_0}^4 f(x)dx=3$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\text{E} = \int_0^4 |f(x)|dx = \int_0^{x_0} (-f(x))dx + \int_{x_0}^4 f(x)dx = 3+3 = 6 \text{ τ.μ.}$$

Δ3. Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,4]$, με $F'(x) = f(x)$.

Απ' το Δ2. προκύπτει ο πίνακας μεταβολών της F:

x	0	x_0	4
$F'(x)$	—	0	+
$F(x)$	↘		↗

Η F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0 και στο 4 και τοπικό ελάχιστο (το οποίο είναι ολικό) στο x_0.

Η F είναι συνεχής στο $[0,4]$ ως παραγωγίσιμη και η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,4)$, αφού $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0,4)$.

Άρα η F είναι κυρτή στο $[0,4]$.

Δ4. Είναι $f'([0,4]) = [1,3]$ οπότε $1 \leq f'(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [0,4]$.

Επίσης η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,4]$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη, με $F''(x) = f'(x)$.

Για την F' προφανώς ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ.Μ.Τ. στο $[0,4]$, οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε

$$F''(\xi) = \frac{F'(4) - F'(0)}{4} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{F'(4) - f(0)}{4} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{F'(4)+2}{4}.$$

Είναι $1 \leq f'(\xi) \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \dfrac{F'(4)+2}{4} \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq F'(4) \leq 10$.

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ – ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ – ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ
ΜΗΤΡΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ – ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ