ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι:

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:

• όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

• κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

[9 μονάδες]

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

[5 μονάδες]

Α3. Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$ τότε:

α. η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο διάστημα (α,β).

β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α,β).

γ. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα (α,β).

δ. δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωση $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β).

[3 μονάδες]

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ και $g(x)=x^{\frac{2}{3}}$ είναι ίσες.

β) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f ισχύει: αν $x_1,x_2\in D_f$ με $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$.

γ) Για κάθε $x>0$ ισχύει: $\left(\eta\mu(\ell nx)\right)'=\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\ell nx)}{x}$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{3^x}=0$.

[8 μονάδες]

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\begin{cases}x^3 &, x<0\\ x^2+\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x-\beta, & x\geq 0\end{cases}$.

Β1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

[Μονάδες 9]

Για $\alpha=\beta=2$:

Β2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

[Μονάδες 8]

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(2\sigma\upsilon\nu x+2\right)=x$.

[Μονάδες 8]

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$9f^2(x)=x^6 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,0] \text{ και } f(-2)>0.$$

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει στο $(-\infty,0]$, μοναδική ρίζα το 0 και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της f.

[Μονάδες 6]

Αν $f(x)=-\dfrac{x^3}{3},\ x\in(-\infty,0]$:

Γ2. Να βρείτε εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη στο σημείο της με τετμημένη $x_0=-3$ και τον άξονα $x'x$.

[Μονάδες 6]

Γ3. Σημείο Μ κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f πλησιάζοντας προς τον άξονα $x'x$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του δίνεται από τον τύπο $x'(t)=-x(t)$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τη χρονική στιγμή που το Μ έχει τετμημένη -3.

[Μονάδες 5]

Γ4. Έστω $F(x)=-\dfrac{x^3}{3},\ x\in\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής και περιττή συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ F$ είναι περιττή και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{4038}(g\circ F)(x-2019)\,dx$.

[Μονάδες 8]

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,3\alpha]\to\mathbb{R}$, με $\alpha>0$, για την οποία ισχύει:

- η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,3\alpha]$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο
- $f''(x)\le x-2\alpha$ για κάθε $x\in[\alpha,3\alpha]$
- η f' είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,3\alpha]$.

Να δειχθεί ότι:

Δ1. Η f είναι κοίλη στο $[\alpha,3\alpha]$.

[Μονάδες 6]

Δ2. Υπάρχει μοναδικό σημείο $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(3\alpha,f(3\alpha))$.

[Μονάδες 5]

Δ3. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΑΒ του ερωτήματος Δ2 και στη συνέχεια να δειχθεί ότι η κατακόρυφη απόσταση της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας ΑΒ μεγιστοποιείται για $x = x_0$, όπου x_0 η τετμημένη του σημείου Μ του ερωτήματος Δ2.

[Μονάδες 8]

Δ4. $\int_{\alpha}^{3\alpha} f(x)dx < 2\alpha f'(x_0)(2\alpha - x_0) + 2\alpha f(x_0)$, όπου x_0 η τετμημένη του σημείου Μ του ερωτήματος Δ2.

[Μονάδες 6]

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ – ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ – ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ
ΜΗΤΡΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ – ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ