ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 186.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 128.

Α3. δ.

Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική, με $f'(x)=3x^2$ και $f''(x)=6x$.

Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών και δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=2x-\alpha\eta\mu x$ και $f''(x)=2-\alpha\sigma\upsilon\nu x$.

Πρέπει η f να είναι συνεχής στο 0:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\alpha=\beta\quad(1)$$

Πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^3-\alpha+\beta}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{x^3}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+\alpha\sigma\upsilon\nu x-\beta-\alpha+\beta}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{2x-\alpha\eta\mu x}{1}=0$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, με $f'(0)=0$.

Πρέπει η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο 0:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x-\alpha\eta\mu x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{2-\alpha\sigma\upsilon\nu x}{1}=2-\alpha$$

Πρέπει να είναι $2-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=2$ και από την (1) έχουμε $\alpha=\beta=2$.

B2. Είναι $f'(x)=\begin{cases}3x^2 & ,x<0\\ 2x-2\eta\mu x, & x\geq 0\end{cases}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)=3x^2>0$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=2x-2\eta\mu x=2(x-\eta\mu x)>0$, γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|x|\geq|\eta\mu x|$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$.

Επίσης η f είναι συνεχής στο 0.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2)=+\infty$, γιατί:

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq1\Leftrightarrow-2\leq2\sigma\upsilon\nu x\leq2\Leftrightarrow-4\leq2\sigma\upsilon\nu x-2\leq0\Leftrightarrow$

$x^2-4\leq x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2\leq x^2$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-4\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty$. Οπότε από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2)=+\infty$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το $\mathbb{R}$.

B3. Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}\left(2\sigma\upsilon\nu x+2\right)$ προφανώς είναι το $\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση έχει νόημα για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$f^{-1}\left(2\sigma\upsilon\nu x+2\right)=x\Leftrightarrow f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+2\quad(2)$

Για $x<0$: (2) $\Leftrightarrow x^3=2\sigma\upsilon\nu x+2$. Η εξίσωση είναι αδύνατη γιατί $x^3<0$ και $2\sigma\upsilon\nu x+2=2(\sigma\upsilon\nu x+1)\geq0$.

Για $x\geq0$: (2) $\Leftrightarrow x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2=2\sigma\upsilon\nu x+2\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow 9f^2(x)=0\Leftrightarrow x^6=0\Leftrightarrow x=0$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα την $x=0$.

Η f στο $(-\infty,0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε στο διάστημα αυτό διατηρεί πρόσημο.

Από υπόθεση $f(-2)>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

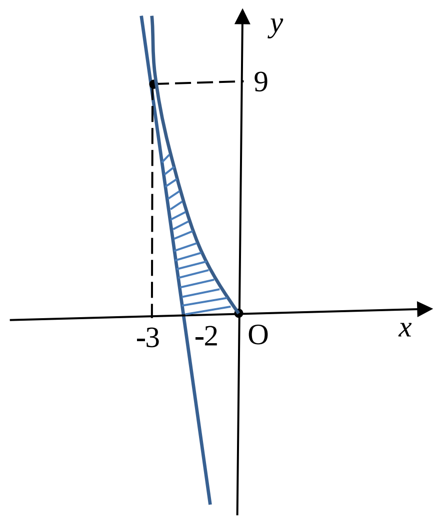
Για $x\in(-\infty,0)$ έχουμε: $f^2(x)=\frac{x^6}{9}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{x^3}{3}$ (αφού $x<0$).

Επειδή $f(0)=0$, είναι: $f(x)=-\frac{x^3}{3}$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$.

Γ2. Είναι $f(x)=-\frac{x^3}{3}$, οπότε $f'(x)=-x^2$, $f(-3)=9$ και $f'(-3)=-9$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη $x_0=-3$ είναι:
$y-9=-9(x+3)\Leftrightarrow y=-9x-18$.

Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία $y=-9x-18$ και τον άξονα $x'x$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Επομένως



$$E=\int_{-3}^{-2}\left(f(x)-(-9x-18)\right)dx+\int_{-2}^{0}f(x)dx=$$

$$\int_{-3}^{-2}\left(-\frac{x^3}{3}+9x+18\right)dx+\int_{-2}^{0}\left(-\frac{x^3}{3}\right)dx=$$

$$\left[-\frac{x^4}{12}+\frac{9x^2}{2}+18x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{x^4}{12}\right]_{-2}^{0}=\frac{9}{4}\ \text{τ.μ.}$$

Γ3. Είναι $y(t)=-\frac{1}{3}x^3(t)$ οπότε $y'(t)=-x^2(t)x'(t)\overset{(x'(t)=-x(t))}{=}x^3(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_o που ισχύει $x(t_o)=-3$ θα έχουμε:
$y'(t_o)=x^3(t_o)=(-3)^3=-27$.

Γ4. Η F έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x\in D_F$ ισχύει ότι $-x\in D_F$. Επίσης $F(-x)=-\frac{(-x)^3}{3}=\frac{x^3}{3}=-F(x)$, άρα η F είναι περιττή.

$D_{g\circ F}=\left\{x\in D_F\ /\ F(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in R\ /-\frac{x^3}{3}\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x\in D_{g\circ F}$ ισχύει ότι $-x\in D_{g\circ F}$.

$(g\circ F)(-x)=g(F(-x))=g(-F(x))=-g(F(x))=-(g\circ F)(x)$, άρα η $g\circ F$ είναι περιττή.

$$I=\int_0^{4038}(g\circ F)(x-2019)dx$$

Θέτουμε $u=x-2019$ οπότε $du=dx$ και για $x=0$, $u=-2019$ και για $x=4038$, $u=2019$. Οπότε

$$I=\int_{-2019}^{2019}(g\circ F)(u)du=\int_{-2109}^{0}(g\circ F)(u)du+\int_{0}^{2019}(g\circ F)(u)du=$$

$-\int_{0}^{2019}(g\circ F)(u)du+\int_{0}^{2019}(g\circ F)(u)du=0$, γιατί:

Θέτουμε $t=-u\Leftrightarrow u=-t$ οπότε $dt=-du$ και για $u=-2019,\ t=2019$ και για $u=0,\ t=0$, οπότε :

$$\int_{-2109}^{0}(g\circ F)(u)du=-\int_{2109}^{0}(g\circ F)(-t)dt=-\int_{0}^{2109}(g\circ F)(t)dt.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $f''(x)\le x-2\alpha$ για κάθε $x\in[\alpha,3\alpha]$, οπότε

$$\int_{a}^{3a}f''(x)dx\le\int_{a}^{3a}(x-2\alpha)dx\Leftrightarrow\left[f'(x)\right]_{a}^{3a}\le\left[\frac{x^2}{2}-2\alpha x\right]_{a}^{3a}\Leftrightarrow$$

$f'(3\alpha)-f'(\alpha)\le0\Leftrightarrow f'(3\alpha)\le f'(\alpha)$ (1)

Επίσης η f' είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,3\alpha]$, οπότε είναι 1-1 και είναι $3\alpha\neq\alpha$, αφού $\alpha>0$. Επομένως $f'(3\alpha)\neq f'(\alpha)$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f'(3\alpha)<f'(\alpha)$.

Έστω ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,3\alpha]$, τότε:

$3\alpha>\alpha\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(3\alpha)>f'(\alpha)$ ΑΤΟΠΟ.

Επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,3\alpha]$.

Άρα η f είναι κοίλη στο $[\alpha,3\alpha]$.

Δ2. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(3\alpha,f(3\alpha))$ έχει κλίση $\lambda_{\mathrm{AB}}=\dfrac{f(3\alpha)-f(\alpha)}{2\alpha}$ (3)

Προφανώς ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,3\alpha]$, οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,3\alpha)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)=\frac{f(3\alpha)-f(\alpha)}{2\alpha}.$$

Επίσης η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,3\alpha]$, επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0\in[\alpha,3\alpha]$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(3\alpha)-f(\alpha)}{2\alpha}$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $\lambda_{\mathrm{AB}}=f'(x_0)$.

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι παράλληλη με την ευθεία AB και το M είναι μοναδικό.

Δ3. Η ευθεία AB έχει κλίση $\lambda_{\mathrm{AB}} = f'(x_0)$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\left(\alpha, f(\alpha)\right)$, οπότε η εξίσωσή της είναι

$$y - f(\alpha) = \lambda_{\mathrm{AB}} \cdot (x-\alpha) \Leftrightarrow y = \lambda_{\mathrm{AB}} \cdot x - \alpha \cdot \lambda_{\mathrm{AB}} + f(\alpha) \Leftrightarrow$$
$$y = f'(x_0)\cdot x - \alpha \cdot f'(x_0) + f(\alpha).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in (\alpha, 3\alpha)$ ισχύει

$$f(x) > y \Leftrightarrow f(x) - f'(x_0)\cdot x + \alpha \cdot f'(x_0) - f(\alpha) > 0.$$

Θέτουμε $g(x) = f(x) - f'(x_0)\cdot x + \alpha \cdot f'(x_0) - f(\alpha)$, $x \in [\alpha, 3\alpha]$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, 3\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, 3\alpha)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.

Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq f'(x_0) \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} x \leq x_0$, οπότε έχουμε:

x	α	x_0	3α
$g'(x)$	+	0	—
$g(x)$	↗		↘

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο α και στο 3α, ίσο με $g(\alpha) = g(3\alpha) = 0$.

Άρα για κάθε $x \in (\alpha, 3\alpha)$ ισχύει $g(x) > 0$.

Η κατακόρυφη απόσταση της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας AB δίνεται από την διαφορά $f(x) - y$, $x \in [\alpha, 3\alpha]$ δηλαδή από τη συνάρτηση g και όπως έχουμε ήδη δείξει η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = x_0$.

[2ος τρόπος λύσης της ανισότητας $f(x) > y$: Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στα [α,x] και [x,3α] και χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της f']

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \mathrm{y} = f'(x_0)\cdot x - x_0 \cdot f'(x_0) + f(x_0).$$

Η f είναι κοίλη στο $[\alpha, 3\alpha]$, οπότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη, δηλαδή ισχύει

$f(x) \leq f'(x_0)\cdot x - x_0 \cdot f'(x_0) + f(x_0)$ για κάθε $x \in [\alpha, 3\alpha]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0$. Επομένως

$$\int_{\alpha}^{3\alpha} f(x)dx < \int_{\alpha}^{3\alpha} \left(f'(x_0)\cdot x - x_0 \cdot f'(x_0) + f(x_0) \right) dx =$$

$$f'(x_0)\cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^{3\alpha} - x_0 \cdot f'(x_0)\cdot [x]_{\alpha}^{3\alpha} + f(x_0)\cdot [x]_{\alpha}^{3\alpha} = \ldots =$$

$2\alpha f'(x_0)(2\alpha - x_0) + 2\alpha f(x_0)$.

[2ος τρόπος λύσης : Από το Δ3. έχουμε $g(x) \le g(x_0)$ *και ολοκληρώνουμε].*

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ – ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ – ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ
ΜΗΤΡΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ – ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ