ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 273

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 92

Α4. Λ - Σ - Σ - Λ - Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. i) $w=\dfrac{6+5i-5i}{6+5i+i}=\dfrac{6}{6(1+i)}=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i}{2}$.

$A=(2w)^{22}+(2\overline{w})^{18}=(1-i)^{22}+(1+i)^{18}=\left((1-i)^2\right)^{11}+\left((1+i)^2\right)^9=(-2i)^{11}+(2i)^9=$
$2^{11}i+2^9i=5\cdot 2^9 i$

ii) $|w|<1\Leftrightarrow\left|\dfrac{z-5i}{z+i}\right|<1\Leftrightarrow|z-5i|<|z+i|\Leftrightarrow|z-5i|^2<|z+i|^2\Leftrightarrow$

$(z-5i)(\overline{z}+5i)<(z+i)(\overline{z}-i)\Leftrightarrow...\Leftrightarrow 6i(z-\overline{z})<-24\Leftrightarrow 6i\cdot 2\,\mathrm{Im}(z)i<-24\Leftrightarrow$
$-12\,\mathrm{Im}(z)<-24\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)>2$

Β2. Θέτουμε $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$ και $(x,y)\neq(0,-1)$.

$$w=\frac{z-5i}{z+i}=\frac{x+yi-5i}{x+yi+i}=\frac{(x+yi-5i)(x-yi-i)}{(x+yi+i)(x-yi-i)}=...=\frac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}-\frac{6x}{x^2+(y+1)^2}i$$

w: φανταστικός $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(w)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4y-5=0\Leftrightarrow$

$x^2+(y-2)^2=9$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0,2)$ και ακτίνα $\rho=3$, εκτός από το σημείο $(0,-1)$.

Β3. i) Απ' το Β2. έχουμε $|z-2i|=3$. Επίσης $|z|=|z-2i+2i|$.

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $\left||z-2i|-|2i|\right| \le |z-2i+2i| \le |z-2i|+|2i| \Leftrightarrow$
$1 \le |z| \le 5$.

Αν $|z|=1$ τότε $x^2+y^2=1$ και από το Β2. έχουμε $x^2+(y-2)^2=9$, οπότε … $x=0$ και $y=-1$, δηλαδή $z=-i$ Άτοπο. Επομένως $|z| \ne 1$.

Άρα $1<|z|\le 5$.

ii) Η ελάχιστη απόσταση της εικόνας του $\dfrac{1}{z}$ από την αρχή των αξόνων είναι η ελάχιστη τιμή του $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

Είναι $1<|z|\le 5 \Leftrightarrow 1>\dfrac{1}{|z|}\ge\dfrac{1}{5}$. Άρα $\left|\dfrac{1}{z}\right|_{\min}=\dfrac{1}{5}$.

Β4. Αφού οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 είναι σημεία κύκλου με ακτίνα 3, η μέγιστη απόστασή τους είναι ίση με το μήκος της διαμέτρου, δηλαδή 6. Επίσης το $|z_1-z_2|$ είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων των z_1, z_2. Επομένως

$|z_1-z_2|\le 6 \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2 \le 36 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\le 36 \Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \le 36 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2 - \left(\overline{z_1}z_2 + \overline{\overline{z_1}z_2}\right) + |z_2|^2 \le 36 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\overline{z_1}z\right) \le 36 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 \le 36 + 2\operatorname{Re}\left(\overline{z_1}z\right)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\sqrt{x^2+1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \quad (1)$

• για $x \ge 0$ η (1) ισχύει.

• για $x<0$: $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 > x^2 \Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει.

Άρα $D_f=\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)'=\ldots=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, οπότε

$f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}-1=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+1}-1=0$

Γ2. $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών της είναι το $f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Θέτουμε $u=\sqrt{x^2+1}+x$.

Όταν $x\to+\infty$, τότε $u\to+\infty$ οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \overset{(\sigma\upsilon\zeta\upsilon\gamma\acute{\eta}\varsigma)}{=} \ldots.=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}=$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right]=0.$$

Οπότε όταν $x\to-\infty$, τότε $u\to 0^+$ γιατί $u=\sqrt{x^2+1}+x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως

$\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)=\lim_{u\to 0^+}(\ln u)=-\infty$.

Άρα $f(\mathrm{A})=\mathbb{R}$.

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=-\frac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

Προφανώς $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$, $f''(x)>0\Leftrightarrow x<0$ και $f''(x)<0\Leftrightarrow x>0$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ και η C_f έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Ο είναι: $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$.

Γ4. Επειδή η C_f είναι κοίλη στο [0,1] και η $y=x$ εφάπτεται στη C_f *στο* $O(0,0)$, είναι $f(x)\le x$ για κάθε $x\in[0,1]$, επομένως:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1|f(x)-x|dx=\int_0^1(x-f(x))dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx.$$

$\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$ και

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x)'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=f(1)-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}+1$. Οπότε

$\mathrm{E}(\Omega)=\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}$ τ.μ.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $\left|f'(x)-f'(y)+\ell n\frac{y}{x}\right|\le(x-y)^4\Leftrightarrow$

$$\left|f'(x)-f'(y)+\ln y-\ln x\right|\le|x-y|^4\Leftrightarrow\left|h(x)-h(y)\right|\le|x-y|^4\overset{(x\neq y)}{\Leftrightarrow}$$

$\left|\dfrac{h(x)-h(y)}{x-y}\right| \le |x-y|^3 \Leftrightarrow -|x-y|^3 \le \dfrac{h(x)-h(y)}{x-y} \le |x-y|^3$. Οπότε για $y = x_0 > 0$

και $x \neq x_0$ έχουμε: $-|x-x_0|^3 \le \dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \le |x-x_0|^3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|^3\right) = \lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|^3 = 0$, οπότε από Κ.Π.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = 0 \Leftrightarrow h'(x_0) = 0$ για κάθε $x_0 \in (0,+\infty)$.

Επομένως (Συνέπειες Θ.Μ.Τ): $h(x) = c \Leftrightarrow f'(x) - \ln x = c,\ x \in (0,+\infty)$.

Δ2. Επειδή η C_f και η C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ ισχύει:

$f(1) = g(1) = 0$ και $f'(1) = g'(1) = 1$.

Για $x = 1$ έχουμε: $h(1) = f'(1) - \ln 1 = c \Leftrightarrow c = 1$ οπότε

$f'(x) - \ln x = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \ln x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x\ln x)' \Leftrightarrow f(x) = x\ln x + c$.

Για $x = 1$: $f(1) = 1\cdot\ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$. Άρα $f(x) = x\ln x,\ x > 0$.

Δ3. $-f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$.

Η συνάρτηση $\int_1^x e^{\frac{1}{t}}dt$ ορίζεται για κάθε $x > o$ διότι η $e^{\frac{1}{t}}$ είναι συνεχής στο

$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $1 \in (0,+\infty)$. Επομένως η συνάρτηση $\int_1^{\frac{\ln x}{x}} e^{\frac{1}{t}}dt$ ορίζεται για κάθε

$x > 0$: $\dfrac{\ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Η συνάρτηση $-x^2 + 6x - 8$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Τελικά η $F(x)$ορίζεται για κάθε $x > 1$.

Η συνάρτηση $\dfrac{\ln x}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο [2,4] και η $\int_1^x e^{\frac{1}{t}}dt$ επίσης, ως αρχική της

συνεχούς $e^{\frac{1}{t}}$, επομένως η $\int_1^{\frac{\ln x}{x}} e^{\frac{1}{t}}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο [2,4] ως σύνθεση

παραγωγίσιμων. Τελικά η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο [2,4], επομένως και συνεχής, ως πράξεις παραγωγίσιμων.

$F(2) = \int_1^{\frac{\ln 2}{2}} e^{\frac{1}{t}}dt$ και $F(4) = \int_1^{\frac{\ln 4}{4}} e^{\frac{1}{t}}dt \overset{(\ln 4 = 2\ln 2)}{=} \int_1^{\frac{\ln 2}{2}} e^{\frac{1}{t}}dt$. Οπότε $F(2) = F(4)$.

Άρα η F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[2,4]$.

Δ4. Είναι $F'(x)=e^{\frac{\frac{1}{\ln x}}{x}}\cdot\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'-2x+6=e^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}-2x+6$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,4)$:

$$F'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\frac{\xi}{\ln\xi}}\cdot\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}-2\xi+6=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow e^{\frac{\xi}{\ln\xi}}(1-\ln\xi)=2\xi^3-6\xi^2.$$

Για $\xi\geq 3\Leftrightarrow 2\xi-6\geq 0\Leftrightarrow \xi^2(2\xi-6)\geq 0$. Επίσης

$$\ln\xi\geq\ln 3>1\Leftrightarrow 1-\ln\xi<0\Leftrightarrow e^{\frac{\xi}{\ln\xi}}(1-\ln\xi)<0.$$

Επομένως $e^{\frac{\xi}{\ln\xi}}(1-\ln\xi)\neq 2\xi^3-6\xi^2$. Άρα $\xi\in(2,3)$.

Δ5. $G(x)=\displaystyle\int_1^{f(x)}\frac{e^{\frac{1}{t}}}{f^2(x)}dt=\frac{\int_1^{f(x)}e^{\frac{1}{t}}dt}{f^2(x)}$.

Για πολύ μεγάλες τιμές του x έχουμε: $x>e\Leftrightarrow\ln x>1\Leftrightarrow x\ln x>x>1$ οπότε $f(x)>1$.

Για $1\leq t\leq f(x)\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}\leq\dfrac{1}{t}\leq 1\Leftrightarrow e^{\frac{1}{f(x)}}\leq e^{\frac{1}{t}}\leq e$, οπότε

$$\int_1^{f(x)}e^{\frac{1}{f(x)}}dt\leq\int_1^{f(x)}e^{\frac{1}{t}}dt\leq\int_1^{f(x)}e\,dt\Leftrightarrow e^{\frac{1}{f(x)}}(f(x)-1)\leq\int_1^{f(x)}e^{\frac{1}{t}}dt\leq e(f(x)-1).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{f(x)}}(f(x)-1)\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e(f(x)-1)\right)=+\infty$.

Από Κ.Π. έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\displaystyle\int_1^{f(x)}e^{\frac{1}{t}}dt\right)=+\infty$. Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^{f(x)}e^{\frac{1}{t}}dt}{f^2(x)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{f(x)}}\cdot f'(x)}{2f(x)\cdot f'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{f(x)}}}{2f(x)}=0.$$