ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε να δείξετε ότι:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

Α2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

(Μονάδες 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει: $\left(f\left(f(x)\right)\right)' = \left(f'(x)\right)^2$.

ii) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το $\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

iii) Αν $2 \le f(x) \le 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 \cdot f(x)\right) = 0$.

iv) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu x$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο (0, 1).

v) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ και $w = \dfrac{iz}{z+i}$, τέτοιοι ώστε $wz \in \mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $\text{Re}(w) = \text{Re}(z)$.

(Μονάδες 5)

Β2. Να γράψετε τον $w-z$ στη μορφή $\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

(Μονάδες 5)

Β4. Να δείξετε ότι οι εικόνες των w,z σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

Β5. Να δείξετε ότι οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων των μιγαδικών $w,\overline{z}$ ταυτίζονται.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=\int_0^x 2t\big(f(t)-2015\big)dt \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι: $f(x)=2015\left(1-e^{x^2}\right),\ x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να μελετήσετε την μονοτονία και το πρόσημο των τιμών της f.

(Μονάδες 4)

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t)dt\le 2015x^2$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Αν $h(x)=\dfrac{1}{2015}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $A\big(1,h(1)\big)$.

(Μονάδες 5)

Γ5. Να αποδείξετε ότι $h(x)-\dfrac{e}{2}\le(1-e)x$, για κάθε $x\ge 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)-2x=\int_0^x f(x-t)dt \text{ και}$$

$$x\int_0^1 g(x+t)dt\ge f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι:

Δ1. $f(x)=2e^x-2,\ x\in\mathbb{R}$

(Μονάδες 4)

Δ2. $\int_0^1 g(x)dx=2$

(Μονάδες 4)

Δ3. υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{x_0} g(t)dt = 1 - f(x_0)$

(Μονάδες 4)

Δ4. η εξίσωση $\int_0^{x} g(t)dt + x\big(g(x) + f'(x)\big) = 1 - f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

(Μονάδες 6)

Δ5. υπάρχει $\eta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g\big(f(\eta)\big) \cdot e^{\eta} = \int_0^{e-1} g(2t)dt$.

(Μονάδες 7)

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ