

# **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

## **Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

### **ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$ .

**[10 μονάδες]**

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**[5 μονάδες]**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

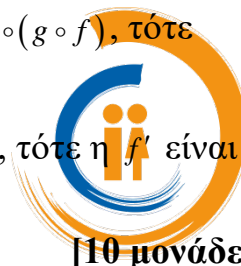
**β)** Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$  τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**γ)** Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε δε μπορεί να είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**δ)** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$ , τότε ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και ισχύει  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**ε)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

**[10 μονάδες]**



## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν:

- $g(x) = \begin{cases} \alpha x + e^{-x}, & x < 0 \\ \beta + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\int_{-1}^1 g(x) dx + f'(x) + 1 = e - \frac{e^x}{e^x + 1} + 2\ln 2$
- $f(0) = -\ln 2$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 1$ .

[6 μονάδες]

**B2.** Να δείξετε ότι  $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

[8 μονάδες]

**B3.** Να δείξετε ότι η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $-\infty$ .

[5 μονάδες]

**B4.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

[6 μονάδες]

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f([1, 3]) = [-1, 4]$
- $f(1) = 1$  και  $f(3) = 3$
- η  $f$  είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο  $[1, 3]$  και  $f'''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (1, 3)$ .

**Γ1.** Δείξτε ότι η  $f''$  είναι 1-1.

[5 μονάδες]

**Γ2.** Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της  $f$ ;

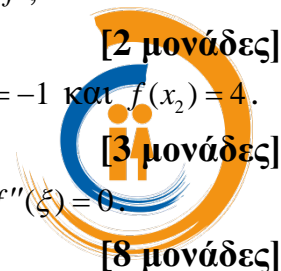
[2 μονάδες]

**Γ3.** Δείξτε ότι υπάρχουν  $x_1, x_2 \in (1, 3)$  τέτοια ώστε  $f(x_1) = -1$  και  $f(x_2) = 4$ .

[3 μονάδες]

**Γ4.** Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (1, 3)$  τέτοιο ώστε  $f''(\xi) = 0$ .

[8 μονάδες]



**Γ5.** Δείξτε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$  τέτοια ώστε

$$(x_1 - 1)f'(\xi_1) - (3 - x_2)f'(\xi_2) = -1.$$

[7 μονάδες]

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) - f^2(x) + f(x) = x^3 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα [3 μονάδες], η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων [2 μονάδες] και βρείτε το πρόσημο των τιμών της  $f$  [1 μονάδα].

[6 μονάδες]

**Δ2.** Δείξτε ότι η ευθεία  $\varepsilon: y = x$  είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$ .

[3 μονάδες]

**Δ3.** Δείξτε ότι  $f(1) \leq \frac{8}{3}$  [4 μονάδες] και στη συνέχεια ότι η εξίσωση

$$(x+2)f(x) - x^2 - 8x + 1 = 0 \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα } (0,1]$$

[4 μονάδες].

[8 μονάδες]

**Δ4.** Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$ ,  $x=3$  δείξτε ότι  $f(1) + f(2) < E < 2f(3)$ .

[8 μονάδες]

### **ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:**

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ  
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ  
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ  
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

