

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Αποδείξτε ότι για μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(a, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι **συνεχής**, ισχύει:  
Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(a, \beta)$ .

[10 μονάδες]

**A2.** Δώστε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ .

[5 μονάδες]

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Αν ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x$  κοντά στο σημείο  $x_0$ , τότε ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ .

ii) Ισχύει ότι:  $(x^x)' = x^x (\ln x + 1)$  για κάθε  $x > 0$ .

iii) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , όπου η  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ο ρυθμός μεταβολής του  $y$  ως προς  $x$  στο σημείο  $x_0$  είναι η παράγωγος  $f'(x_0)$ .

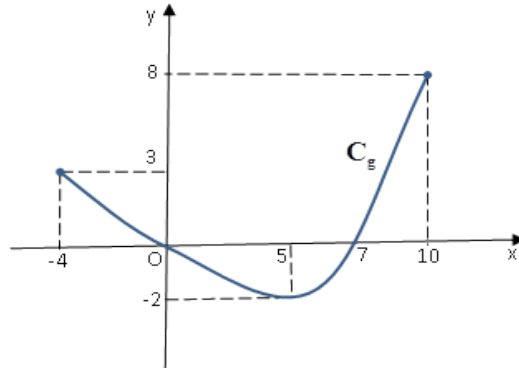
iv) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$ , παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, 1)$  και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$ , τότε  $f(0) \neq f(1)$ .

v) Ισχύει ότι:  $\int_1^e \ln x \, dx = -\int_e^1 \ln \left(\frac{1}{t}\right) dt$ .



## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \ln x$  και συνάρτηση  $g$  της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- B1.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των  $f$  και  $g$  και το σύνολο τιμών της  $g$ .  
[5 μονάδες]
- B2.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f \circ g$  και  $g \circ f$ .  
[7 μονάδες]
- B3.** Να βρείτε τα όρια:  
i)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 7} g(x)$ .  
ii)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(g(x))$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$ .  
[6 μονάδες]
- B4.** Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας:  
i) της  $f$  και της  $g$   
ii) της  $-g$   
iii) της  $f \circ g$ .  
[7 μονάδες]

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Γ1.** Δείξτε ότι η  $f$  αντιστρέφεται  
[3 μονάδες]
- Γ2.** Βρείτε τις ρίζες της  $f$ , το πρόσημό της και το σύνολο τιμών της.  
[6 μονάδες]
- Γ3.** Δείξτε ότι για κάθε  $x > 1$  ισχύει:  $f\left(f^{-1}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} - 1\right) - 1\right) < -5$ .  
[5 μονάδες]
- Γ4.** Με δεδομένο ότι η  $f^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$   
i) δείξτε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$   
[3 μονάδες]  
ii) βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f^{-1}$  στο σημείο  $(0, f^{-1}(0))$ .  
[4 μονάδες]



iii) υπολογίστε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{f\left(\frac{1}{x} + 1\right)}$ .

[4 μονάδες]

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) \cdot e^{x+f(x)} = 3x^2 - x^3$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  και
- η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, -1)$ .

**Δ1.** Δείξτε ότι  $f(x) = 3\ln x - x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

[6 μονάδες]

**Δ2.** Δείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε οποιοδήποτε σημείο της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της  $f$  εκτός από το σημείο επαφής.

[4 μονάδες]

**Δ3.** Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων [3 μονάδες] και στη συνέχεια το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την εφαπτομένη αυτή, τη γραφική παράσταση της  $f$  και την ευθεία  $x = 1$  [4 μονάδες].

[7 μονάδες]

**Δ4.** Αν η συνάρτηση  $F(x)$  είναι μια αρχική της  $f$  για την οποία ισχύει  $F(1) \neq F(2)$ ,

δείξτε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (1, 2)$  τέτοια ώστε  $\int_1^2 F(x) \cdot f(x) dx = f(\xi_1) \cdot F(\xi_2)$ .

[8 μονάδες]

### ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ  
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ  
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ  
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

