

# **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

## **Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

### **ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι :

Αν  $f(x) = x^{-\nu}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$  και  $x \in \mathbb{R}^*$ , τότε  $f'(x) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$ .

**[Μονάδες 6]**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano καθώς και τη γεωμετρική του ερμηνεία.

**[Μονάδες 5]**

**A3.** Αν  $A, B$  είναι τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f, g$  αντίστοιχα, να δώσετε τον ορισμό της συνάρτησης  $f \circ g$ .

**[Μονάδες 4]**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ:

α) Αν  $f'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x) = c \cdot e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β) Αν  $f, g$  συνεχείς στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , με  $f(x) > g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx > \int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx$ .

γ) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$  και  $g(x) = e^{1-x}$  έχουν κοινή οριζόντια ασύμπτωτη.

δ) Αν  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει το πολύ 3 ρίζες.



ε) Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , με  $f(0) = f'(0) = 0$ , τότε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \neq 0$ .

[Μονάδες 10]

### ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A = [-3, 2]$ .

**B1.** Να βρείτε τις ρίζες, το πρόσημο, το σύνολο τιμών, τη μονοτονία και τα ακρότατα της παραγώγου  $f'(x)$ .

[Μονάδες 8]

**B2.** Να βρείτε τη μονοτονία, τις θέσεις των ακροτάτων και την κυρτότητα της συνάρτησης  $f$  καθώς και τις θέσεις των σημείων καμπής της  $C_f$ .

[Μονάδες 6]

**B3.** Αν  $f(-1) = 2$ , τότε:

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = -1$ .

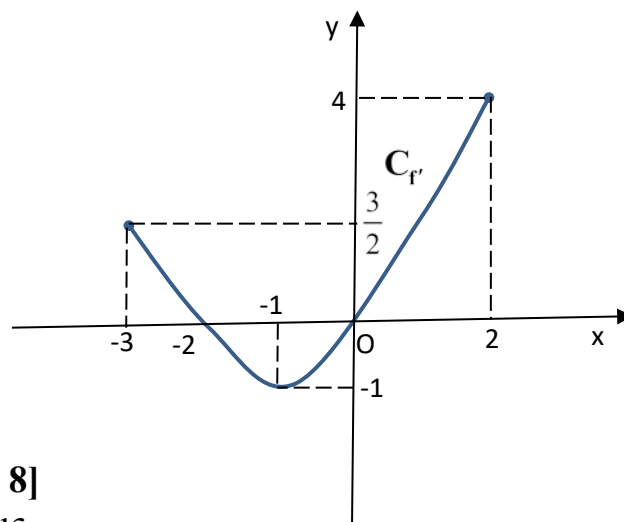
[Μονάδες 2]

ii) Να δείξετε ότι  $f(x) \geq -x + 1$  για κάθε  $x \in [-1, 2]$ .

[Μονάδες 4]

iii) Να δείξετε ότι  $f(f'(x+1)) \geq 1$  για κάθε  $x \in [-1, 2]$ .

[Μονάδες 5]



### ΘΕΜΑ Γ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{1+e^x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .



- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και στη συνέχεια ότι η εξίσωση  $x - \ln(e^x + 1) = \kappa - \ln 2$ , με  $0 < \kappa < \ln 2$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $\mathbb{R}$ .  
[Μονάδες 7]
- Γ3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  και τα σημεία καμπής της.  
[Μονάδες 5]
- Γ4.** Αν  $g(x) = f(x) - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $a > 0$ , να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι περιττή και στη συνέχεια ότι  $I = \int_{-a}^a g(x) dx = 0$ .  
[Μονάδες 6]

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

- $f(0) = 1$
- $f(x) \neq x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και
- $\frac{f(x)}{f(x) - x} = f'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι:

- i)  $f(x) > x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,
- ii)  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και
- iii)  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

[Μονάδες 10]

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g$ , με  $g(x) = \ln f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ2.** Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης  $g$ .

[Μονάδες 4]

**Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_g$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 1$ .

[Μονάδες 6]

**Δ4.** Να δείξετε ότι  $\int_1^3 \ln(g(x)) dx > 2 \cdot \int_1^2 \ln(g(x)) dx$ .

[Μονάδες 5]



**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:**

**ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΩΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ  
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ  
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ  
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ**

