ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι : «Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$ ».

[Μονάδες 10]

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

[Μονάδες 5]

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

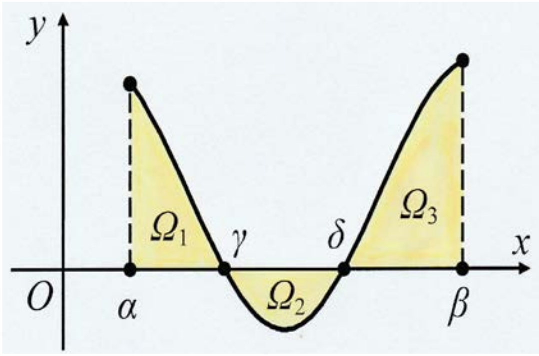
α) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[\mathrm{m},M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

β) Για κάθε $x>0$ ισχύει: $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

δ) Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

ε) Αν για τη συνάρτηση f του διπλανού σχήματος είναι $\mathrm{E}(\Omega_1)=2$, $\mathrm{E}(\Omega_2)=1$ και $\mathrm{E}(\Omega_3)=3$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=6$.



[Μονάδες 10]

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Β1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

[Μονάδες 7]

Β2. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)\geq x$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} για κάθε $x>0$.

[Μονάδες 7]

Β3. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

[Μονάδες 4]

Β4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, την ευθεία $y=x$ και την ευθεία $x=\dfrac{1}{2}$ (δίνεται ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της).

[Μονάδες 7]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$
- η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\left(2, f(2)\right)$
- $f'(1)=0$
- το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $y'y$ και την εφαπτομένη (ε), είναι ίσο με $\frac{8}{3}$.

Γ1. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τη θέση των ακρότατων της f.

[Μονάδες 5]

Γ2. Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{14}{3}$.

[Μονάδες 5]

Γ3. Να δείξετε ότι: i) υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{7}{3}$

ii) $f'(0)<\frac{f'(x_0)}{2}<2$.

[Μονάδες 10]

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^2 (x-1)f(t)\,dt=(x-2)f(x)+4-x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

[Μονάδες 5]

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- $(x^2+1)f'(x)=2-2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι: $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

[Μονάδες 4]

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (Μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, με $\lambda\in(0,1)$ (Μονάδες 4)

[Μονάδες 7]

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- $g(x)\le g(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g'(0)=g'(1)>0$
- η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με γνησίως μονότονη δεύτερη παράγωγο, στο $\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι :

Δ3. η g'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ (Μονάδες 3) και στη συνέχεια ότι η γραφική παράσταση της g έχει μοναδικό σημείο καμπής $A\left(x_0,\mathrm{g}(x_0)\right)$ (Μονάδες 3).

[Μονάδες 6]

Δ4. η εξίσωση $g\left(f(x)\right)-g(x_0)=g'(x_0)\left(f(x)-x_0\right)$, έχει δύο τουλάχιστον θετικές ρίζες, όπου x_0 η τετμημένη του σημείου καμπής της γραφικής παράστασης της g.

[Μονάδες 4]

Δ5. αν $a\in(0,x_0)$ και $\beta\in(1,2)$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} g''(x)dx<0$.

[Μονάδες 4]

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ