Καράρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 142.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 162.

Α3. α) Σ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή, με $f'(x)=\ldots=\dfrac{x^2(x^2+3)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Προφανώς $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και $f'(0)=0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Β2. $f^{-1}(x)\geq x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(x)\right)\geq f(x)\Leftrightarrow f(x)\leq x\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x\geq 0$ και

$f^{-1}(0)=0=f(0)$.

Οπότε η $C_{f^{-1}}$ τέμνει την ευθεία $y=x$ για $x=0$ και βρίσκεται πάνω από την $y=x$ για κάθε $x>0$.

Επομένως κάθε $x>0$ έχουμε $f^{-1}(x)>x$ και $x>f(x)$, άρα $f^{-1}(x)>f(x)$, δηλαδή η C_f βρίσκεται κάτω από την $C_{f^{-1}}$ για κάθε $x>0$.

Β3. Προφανώς $f(0)=0$ και $f'(0)=0$. Οπότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,0)$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=0$, δηλαδή είναι ο άξονας $x'x$.

Β4. Απ' το Β2. έχουμε ότι $f^{-1}(0)=0$ και $f^{-1}(x)>x$ για κάθε $x>0$. Επίσης

$f^{-1}(x)<x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(x)\right)<f(x)\Leftrightarrow f(x)>x\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x<0$.

Συνεπώς η $C_{f^{-1}}$ τέμνει την ευθεία $y=x$ μόνο για $x=0$ και βρίσκεται πάνω από την $y=x$ για κάθε $x>0$.

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f^{-1}(x)-x\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}f^{-1}(x)dx-\int_0^{\frac{1}{2}}x\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}f^{-1}(x)dx-\frac{1}{8}.$$

Έστω $I=\int_0^{\frac{1}{2}}f^{-1}(x)dx$.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$, οπότε $dx=f'(u)\,du$.

Για $x=0$: $f^{-1}(0)=u\Leftrightarrow u=0$

$x=\frac{1}{2}$: $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=u\Leftrightarrow f(u)=\frac{1}{2}\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}u=1$. Επομένως

$$I=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{u^3}{u^2+1}du=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{u^3+u-u}{u^2+1}du=$$

$$\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{u(u^2+1)-u}{u^2+1}du=\frac{1}{2}-\int_0^1\left(u-\frac{u}{u^2+1}\right)du=\frac{1}{2}-\left[\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}\ell n(u^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ell n2.$$

Άρα $E=\left(\frac{1}{2}\ell n2-\frac{1}{8}\right)$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(1)=0$.

$x<1\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(1)=0$ και $x>1\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(1)=0$.

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(-\infty,1]$ έχουμε $x\le 1\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x)\ge f(1)$ και για κάθε $x\in[1,+\infty)$ έχουμε $x\ge 1\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)\ge f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_1=1$.

Γ2. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε), δηλαδή ισχύει $f(x)\ge y\Leftrightarrow f(x)-(2x-1)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για το δοσμένο εμβαδόν έχουμε:

$$E=\int_0^2\left(f(x)-(2x-1)\right)dx=\int_0^2 f(x)d\,x-\int_0^2(2x-1)d\,x=...=\int_0^2 f(x)d\,x-2$$

Όμως $E=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)d\,x-2=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)d\,x=\frac{14}{3}$.

Γ3. i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\int_0^2 f(x)d\,x=F(2)-F(0)\Leftrightarrow F(2)-F(0)=\frac{14}{3}.$$

Για την F προφανώς ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,2]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $F'(x_0) = \dfrac{F(2)-F(0)}{2-0} \Leftrightarrow f(x_0) = \dfrac{7}{3}$.

ii) Η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\left(2, f(2)\right)$, οπότε $f'(2) = \lambda_\varepsilon = 2$.

$$0<1<2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(1) < f'(2) \Leftrightarrow f'(0) < 0 < 2 \qquad (1)$$

$$0<x_0<2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(x_0) < f'(2) \Leftrightarrow f'(0) < f'(x_0) < 2 \qquad (2)$$

(1) + (2) : $2f'(0) < f'(x_0) < 4 \Leftrightarrow f'(0) < \dfrac{f'(x_0)}{2} < 2$.

Γ4. Είναι $\int_1^2 (x-1) f(t)\,dt = (x-2)f(x) + 4 - x \Leftrightarrow$

$$(x-1)\int_1^2 f(t)\,dt - (x-2)f(x) - 4 + x = 0$$

Θέτουμε $g(x) = (x-1)\int_1^2 f(t)\,dt - (x-2)f(x) - 4 + x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών.

$g(1) = f(1) - 3 = f(1) - f(2) < 0$, γιατί:

η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\left(2, f(2)\right)$, οπότε $f(2) = y = 3$ και

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε $1<2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(1) < f(2)$.

$g(2) = \int_1^2 f(t)\,dt - 2 > 0$, γιατί:

η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε), δηλαδή ισχύει $f(\mathrm{t}) \geq 2t-1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $t=2$, οπότε

$$\int_1^2 f(t)\,dt > \int_1^2 (2t-1)\,dt = 2.$$

Από το Θ. Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η συνάρτηση $(x^2+1)f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων (η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη).

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(x^2+1)f'(x) = 2 - 2xf(x) \Leftrightarrow (x^2+1)f'(x) + 2xf(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\left((x^2+1)f(x)\right)' = (2x)' \Leftrightarrow (x^2+1)f(x) = 2x + c \quad (1)$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε $f(0)=0$.

Για $x=0$ η (1) δίνει: $f(0)=c \Leftrightarrow c=0$. Επομένως

$$(x^2+1)f(x)=2x \overset{x^2+1\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{2x}{x^2+1}.$$

Δ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή, με $f'(x)=\ldots=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

Εύκολα προσδιορίζουμε τον πίνακα προσήμων της f':

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$.

$$f\left((-\infty,-1]\right)=\left[f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=[-1,0)$$

$$f\left([-1,1]\right)=\left[f(-1), f(1)\right]=[-1,1] \text{ και}$$

$$f\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]=(0,1]$$

Άρα $f\left(\mathbb{R}\right)=[-1,1]$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda\in(0,1)$ έχουμε:

$\lambda\notin f\left((-\infty,-1]\right)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,-1]$.

$\lambda\in f\left([-1,1]\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[-1,1]$.

$\lambda\in f\left([1,+\infty)\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[1,+\infty)$.

Επίσης $f(1)=1\neq\lambda$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\leq g(2)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $\kappa=2$, στο οποίο είναι παραγωγίσιμη. Από το Θ. Fermat έχουμε $g'(2)=0$.

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την g' στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0)=0$.

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την g' στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g''(x_1)=\dfrac{g'(2)-g'(1)}{2-1}=-g'(1)$.

Έστω ότι η g'' είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$$x_0 < x_1 \overset{g''\uparrow}{\Leftrightarrow} g''(x_0) < g''(x_1) \Leftrightarrow 0 < -g'(1) \Leftrightarrow g'(1) < 0 \text{ ΑΤΟΠΟ.}$$

Άρα η g'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η g'' έχει μοναδική ρίζα το x_0, αφού $g''(x_0)=0$ και η g'' είναι γνησίως μονότονη (φθίνουσα) στο $\mathbb{R}$. Επίσης

$$x < x_0 \overset{g''\downarrow}{\Leftrightarrow} g''(x) > g''(x_0) = 0 \text{ και}$$

$$x > x_0 \overset{g''\downarrow}{\Leftrightarrow} g''(x) < g''(x_0) = 0.$$

Επίσης η g είναι συνεχής στο $(-\infty, x_0]$ και στο $[x_0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη.

Επομένως η g είναι κυρτή στο $(-\infty, x_0]$ και κοίλη στο $[x_0, +\infty)$. Επίσης η C_g έχει σημείο καμπής το $A\big(x_0, f(x_0)\big)$, το οποίο είναι μοναδικό.

Δ4. Απ' το Δ2. Έχουμε ότι $f\big((0,1)\big) = (0,1)$ και $f\big([1,+\infty)\big) = (0,1]$.

Επίσης $x_0 \in (0,1)$. Οπότε η εξίσωση $f(x) = x_0$ έχει δύο ρίζες, μία στο $(0,1)$ και μία στο $[1,+\infty)$. Δηλαδή υπάρχει ένα $\rho_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1) = x_0$ και ένα $\rho_2 \in [1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2) = x_0$.

Για $x = \rho_1$ και για $x = \rho_2$ η εξίσωση $g\big(f(x)\big) - g(x_0) = g'(x_0)\big(f(x) - x_0\big)$ προφανώς αληθεύει.

Δ5. $\int_\alpha^\beta g''(x)dx < 0 \Leftrightarrow \big[g'(x)\big]_\alpha^\beta < 0 \Leftrightarrow g'(\beta) - g'(\alpha) < 0$.

Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$.

$$a \in (0, x_0) \text{ οπότε } a > 0 \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(\alpha) > g'(0) = g'(1)$$

$$\beta \in (1,2) \text{ οπότε } \beta > 1 \overset{g'\downarrow}{\Leftrightarrow} g'(\beta) < g'(1)$$

Άρα $g'(\beta) < g'(1) < g'(\alpha)$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ