

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

[7 μονάδες]

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

[4 μονάδες]

A3. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

[4 μονάδες]

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,3]$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)f(x)) = 0$.

β) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f^{-1} .

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(5^{2x})' = 5^{2x} \cdot \ln 5$.

δ) Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = +\infty$.

ε) Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του δωματίου που βρίσκεστε τώρα, είναι θετικός.

[10 μονάδες]



ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 1 \\ \beta + \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρεθούν τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

[Μονάδες 7]

Για $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

B2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

[Μονάδες 7]

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της f .

[Μονάδες 6]

B4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_4^9 f(\sqrt{x}) dx$.

[Μονάδες 5]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x+1} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

[Μονάδες 5]

Γ2. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

[Μονάδες 8]

Γ3. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, το -1 και το 0 και ισχύει $-1 < x_0 < 0$, όπου x_0 η θέση ολικού ελαχίστου του ερωτήματος Γ2.

[Μονάδες 6]

Γ4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $A(0, f(0))$ και την ευθεία $x = 1$.

[Μονάδες 6]



ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- η f είναι παραγωγίσιμη, με συνεχή και γνησίως μονότονη πρώτη παράγωγο

- $f(1) = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot f(x-1) - 2 \cdot f(2)}{x-2} = 3.$

Να δειχθεί ότι:

Δ1. α) $f(2) = 1$ και

β) $f'(1) = 1.$

[Μονάδες 6]

Δ2. α) Η f είναι κοίλη και

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$

[Μονάδες 6]

Δ3. Για κάθε $x \leq 1$ ισχύει: $f(x) - (x-1) \cdot f'(x) - 1 \geq 0.$

[Μονάδες 6]

Δ4. Η εξίσωση $(x+1) \cdot f(x-1) + 2 \cdot f'(x-1) = \frac{2x \cdot \int_0^1 f(x) dx - 1}{x-1}$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1).$

[Μονάδες 7]

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

