ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΦΥΣΙΚΗ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Ι. 1. Γ

2. Α $W_F = F \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \dfrac{dW_F}{dt} = \dfrac{d}{dt}(F \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta) \Leftrightarrow P_F = F \cdot \dfrac{dx_{cm}}{dt} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$

$P_F = F \cdot u_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

3. Α

4. Δ (στην απάντηση β) πρέπει να προσθέσουμε την αύξηση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του τροχού).

ΙΙ. 1.Λ 2.Σ 3.Σ 4.Λ 5.Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. ΣΩΣΤΗ Η Α

Η κρούση είναι κεντρική ελαστική με τα σώματα να έχουν ίσες μάζες οπότε έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων. Μετά την κρούση το Σ1 ακινητοποιείται (Στιγμιαία γιατί μετά πέφτει) ενώ το Σ2 αποκτά ταχύτητα μέτρου u.

Πριν τη κρούση το σώμα Σ2 είναι ακίνητο γιατί δέχεται δυο αντίθετες δυνάμεις , το βάρος και την τάση του νήματος :

$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow T = mg$ (1)

Αμέσως μετά την κρούση συμφωνά με την εκφώνηση η τάση του νήματος T' είναι διπλασία από αύτη που δέχεται πριν την κρούση :

$T' = 2T = 2mg$ (2)

Το σώμα Σ2 αμέσως μετά την κρούση διαγράφει τμήμα κυκλικής τροχιάς οπότε συμφωνά με την γνωστή μηχανική η συνισταμένη δύναμη που δέχεται προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι η αναγκαία κεντρομόλος δύναμη:

$$\Sigma F = F_K \Leftrightarrow T' - mg = m \cdot \frac{u^2}{R} \Leftrightarrow 2mg - mg = m \cdot \frac{u^2}{l} \Rightarrow u = \sqrt{gl}$$

Β2.

α) Τα δυο σώματα μέχρι να συγκρουστούν εκτελούν τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης με πλάτη τις αρχικές απομακρύνσεις x_1, x_2 και με την ίδια περίοδο

$$T = T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{2k}}\ .$$

Λόγω της ίδιας περιόδου τα σώματα συγκρούονται για πρώτη φορά μετά από T/4 στη θέση ισορροπίας ταλάντωσής τους που είναι και η θέση φυσικού μήκους των ελατηρίων.

β) Οι ταχύτητες με τις οποίες τα σώματα φτάνουν στην ΘΙ είναι οι μέγιστες ταχύτητες της ταλάντωσης του κάθε συστήματος

Για το σώμα Σ1: $u_1 = u_{\max} = \omega \cdot x_1$

Για το σώμα Σ2: $u_2 = u_{\max} = \omega \cdot x_2 = \omega \cdot 2x_1 = 2u_1$

Έστω ότι δυο σώματα με μάζες m_1, m_2 κινούνται με ταχύτητες u_1, u_2 και συγκρούονται κεντρικά ελαστικά. Με εφαρμογή των αρχών που διέπουν την ελαστική κρούση αποδεικνύουμε ότι :

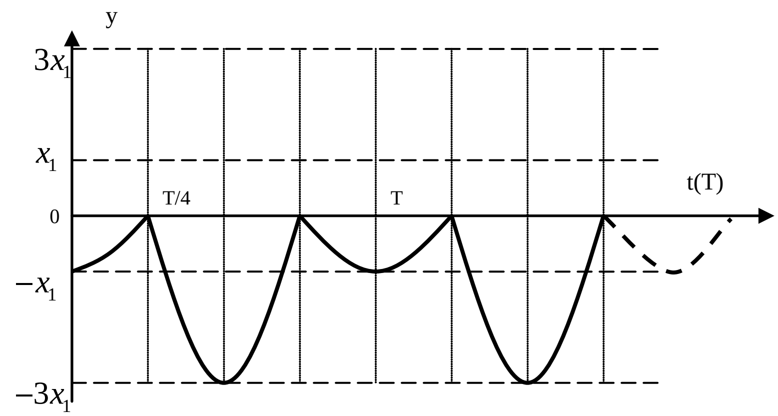
$$u_1^{'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2$$

(1)

$$u_2^{'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}u_2$$

(2)

Η θετική φορά είναι προς τα δεξιά.



Θέτουμε στους παραπάνω τύπους όπου $\boxed{u_1 = +u_1}$ και $\boxed{u_2 = -2u_1}$

Προκύπτει : $\boxed{u_1^{'} = -3u_1}$ και $\boxed{u_2^{'} = 0}$ δηλαδή το σώμα Σ2 μετά την κρούση παραμένει ακίνητο.

γ) Από τη στιγμή της κρούσης και μετά το σώμα Σ1 εκτελεί τμήμα ΑΑΤ με την ίδια θέση ισορροπίας , την ίδια περίοδο και με μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης τριπλάσια από αυτή που είχε πριν την κρούση. Άρα το πλάτος της νέας ΑΑΤ που εκτελεί είναι τριπλάσιο του αρχικού x_1.

Μετά από $\dfrac{T}{2}$ το Σ1 επανέρχεται στην θέση ισορροπίας του με αλγεβρική τιμή ταχύτητας $u_1^{''} = +3u_1$ και συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με το σώμα Σ2.

Στους τύπους (1) και (2) θέτουμε στις θέσεις των u_1, u_2 τις : $u_1^{''} = +3u_1$ και $u_2^{''} = 0$.

Έχουμε : $u_1^{'''} = -u_1$ και $u_2^{'''} = 2u_1$

Αν παρατηρήσουμε τις νέες ταχύτητες διαπιστώνουμε ότι η ενέργεια που έλαβε για μισή περίοδο το Σ1 από το Σ2 επιστρέφει στο Σ2. Η επόμενη κρούση των δυο σωμάτων θα έχει τις ίδιες προϋποθέσεις με την αρχική κρούση και θα συμβεί τη χρονική στιγμή $5T/4$.

Η απομάκρυνση του Σ1 από τη θέση ισορροπίας του δεν παίρνει ποτέ θετικές τιμές και σύμφωνα με τα παραπάνω η γραφική της απομάκρυνσης του από τη θέση ισορροπίας του είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα .

Β3. Ι. ΣΩΣΤΗ Η Α

Η ροπή αδράνειας του στερεού είναι το άθροισμα των ροπών αδράνειας κάθε κυλίνδρου ως προς τον κοινό άξονα συμμετρίας.

$$I=\frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{2}\cdot 8m\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2=mR^2+mR^2=2mR^2 .$$

ΙΙ. ΣΩΣΤΗ Η Α

<u>Α- τρόπος</u> : Η σχέση που συνδέει την επιτάχυνση του άξονα συμμετρίας με την γωνιακή επιτάχυνση είναι $a_1=a_\gamma\cdot R$

<u>Μεταφορική κίνηση κέντρου μάζας στερεού Π:</u>

$$\Sigma F_x=m_{o\lambda}\cdot a_1\Leftrightarrow(\searrow +):(m+m+8m)g\cdot \eta\mu\varphi-T=(m+m+8m)\cdot a_1\Leftrightarrow$$

$$10mg\cdot\eta\mu\varphi-T=10m\cdot a_1(1)$$

<u>Στροφική κίνηση στερεού</u> : $\Sigma\tau=I\ \cdot a_\gamma\Leftrightarrow T\cdot R=2mR^2\left(\frac{a_1}{R}\right)\Leftrightarrow T=2m\cdot a_1(2)$

Με πρόσθεση κατά μελή των σχέσεων (1),(2) :

$$\boxed{10mg\cdot\eta\mu\varphi-T+T=12m\cdot a_1\Leftrightarrow a_1=\frac{10\cdot g\cdot\eta\mu\varphi}{12}}\ (3)$$

<u>Β- τρόπος</u> : Η σχέση που συνδέει την επιτάχυνση του άξονα συμμετρίας με την γωνιακή επιτάχυνση είναι $a_2=a_\gamma{}'\cdot\frac{R}{2}$ γιατί η ακτίνα κύλισης του στερεού είναι τώρα η R/2.Η στατική τριβή που ασκείται στο στερεό δεν είναι ίδια με την προηγούμενη.

<u>Μεταφορική κίνηση κέντρου μάζας στερεού Π:</u>

$$\Sigma F_x=m_{o\lambda}\cdot a_2\Leftrightarrow(\searrow +):(m+m+8m)g\cdot \eta\mu\varphi-T'=(m+m+8m)\cdot a_2\Leftrightarrow$$

$$10mg\cdot\eta\mu\varphi-T'=10m\cdot a_2(4)$$

<u>Στροφική κίνηση στερεού</u> : $\Sigma\tau=I\ \cdot a_\gamma{}'\Leftrightarrow T'\cdot\frac{R}{2}=2mR^2\left(\frac{a_2}{R/2}\right)\Leftrightarrow T'=8m\cdot a_2(5)$

Με πρόσθεση κατά μελή των σχέσεων (4),(5) :

$$\boxed{10mg\cdot\eta\mu\varphi-T'+T'=18m\cdot a_2\Leftrightarrow a_2=\frac{10\cdot g\cdot\eta\mu\varphi}{18}}\ (6)$$

Από τις σχέσεις (3), (6) φαίνεται ότι : $\boxed{a_1>a_2}$.

ΙΙΙ. ΣΩΣΤΗ Η Β

Σύμφωνα με την συνθήκη κύλισης η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι κάθε χρονική στιγμή:

$$u_{cm}=\omega\cdot\frac{R}{2} .$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η ταχύτητα του ανώτερου σημείου ενός κυλίνδρου ακτίνας R είναι : $u_A = u_{\mu\varepsilon\tau} + u_{\sigma\tau\rho o\varphi} = u_{cm} + u_{\gamma\rho(\mathrm{A})} = \omega \cdot \frac{R}{2} + \omega \cdot R = \frac{3}{2}\omega \cdot R$

Άρα το ζητούμενο πηλίκο είναι : $\frac{u_{cm}}{u_A} = \frac{\omega \cdot \frac{R}{2}}{\frac{3}{2}\omega \cdot R} = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

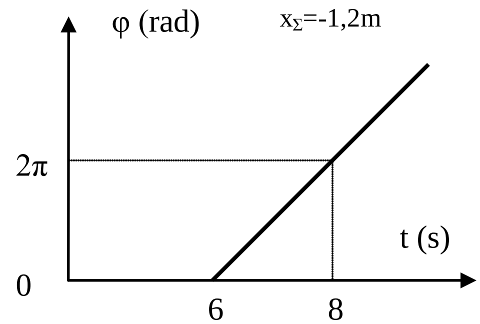
Γ1. Το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά. Αν είχαμε διάδοση του κύματος προς τα δεξιά το σημείο Σ θα είχε αρχίσει να εκτελεί ΑΑΤ πριν την χρονική στιγμή t=0, που το κύμα φτάνει στην αρχή μέτρησης Ο (x=0).

Γ2. Από την γραφική παράσταση έχουμε:

- $A = 0{,}1m$
- $3T = 6s \Leftrightarrow T = 2s$
- $u_k = \frac{|x_\Sigma|}{t} = \frac{1{,}2}{6} = 0{,}2m/s$ άρα από την κυματική εξίσωση : $\lambda = 0.4m$.

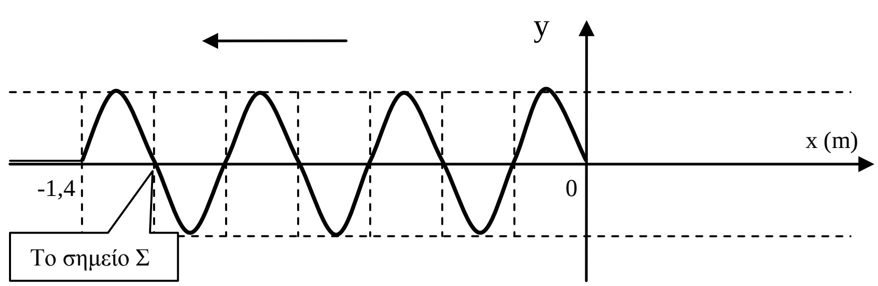
Τελικά $\boxed{y = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{0{,}4}\right)}$ στο SI.

Γ3. α) Η φαση του σημειου Σ δινεται απο τον τυπο $\varphi_\Sigma = 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{-1{,}2}{0{,}4}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{2} - 3\right)$ στο SI.



Το σημείο Σ αρχίζει να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή $t_0 = 6s$ και έχει εκείνη την στιγμή, φάση ίση με το μηδέν. Η κλίση της γραφικής ειναι ίση με την κυκλική συχνότητα ω και κάθε περίοδο η φάση του σημείου Σ αυξάνεται κατά 2πrad.

β) Όταν η φάση του σημείου Σ είναι ιση με $\phi_\Sigma = \pi rad$ τότε το Σ έχει εκτελέσει μισή



ταλάντωση και έχει διέλθει από μπροστά του ένα «όρος» του κύματος.

Το κύμα εχει διαδοθεί στον αρνητικό ημιάξονα μέχρι τη θέση

$x = x_\Sigma - \frac{\lambda}{2} = -3\lambda - \frac{\lambda}{2} = -3,5\lambda = -1,4m$. Η εξισωση της γραφικης του στιγμιοτυπου αφορά τη χρονική στιγμή $t_1 = 3T + \frac{T}{2} = 7s$ και είναι $\boxed{y = 0,1\eta\mu 2\pi\left(\frac{7}{2} + 2,5x\right)}$ στο SI.

Γ4. Η φάση του σημείου Λ είναι κάθε χρονική στιγμή μεγαλύτερη από την φάση του σημείου Σ, γιατί βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα.Το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά οπότε πρώτα έφτασε το κύμα στο σημείο Λ και μετά στο σημείο Σ.
Η απόσταση μεταξύ τους είναι $\Delta x = |x_\Sigma| + x_\Lambda = 1,2 + 0,75 = 1,95m$.
Η διαφορά φάσης μεταξύ τους (με απόδειξη του τύπου) :

$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{1,95}{0,4} = 9,75\pi rad$.

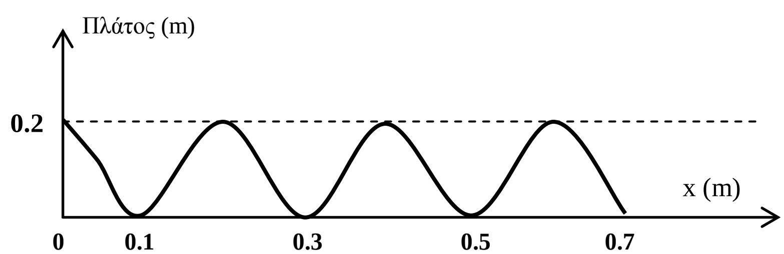
Όταν η φάση του σημείου Σ είναι $\phi_\Sigma = \frac{9\pi}{4} rad$ τότε η φάση του σημείου Λ είναι

$\phi_\Lambda = \phi_\Sigma + \Delta\phi = 2,25\pi + 9,75\pi = 12\pi$.
Άρα η ταχύτητα του σημείου Λ είναι:
$u_\Lambda = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu\phi_\Lambda = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu 12\pi = +u_{\max} = \pi \cdot 0,1 = 0,1\pi m/s \Leftrightarrow \boxed{u_\Lambda = 0,1\pi m/s}$

Γ5. α) Από την γενική μορφή : $u = \omega 2\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \Leftrightarrow \boxed{u = 0.2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 5\pi x \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t}$ στο SI.

β) Το πλάτος των σημείων του μέσου δίνεται απο τον τύπο :

$|A'| = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = |0.2\sigma\upsilon\nu 5\pi x|$ στο SI, και παίρνει μόνο θετικές τιμές μεταξύ των τιμών 2A=0,2m για κοίλια και μηδέν για δεσμό.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Οι δίσκοι είναι ομοαξονικοί και ομογενείς όποτε ως προς τον κοινό του άξονα συμμετρίας :

$I = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2 = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + \frac{1}{2}3m_1(2R_1)^2 = 6,5m_1R_1^2 = \frac{13}{8}kgm^2$

Δ2. Οι δυνάμεις $T_1, T_{\sigma\tau}$ πρέπει ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας $\Sigma F = 0, \Sigma\tau = 0$, για το στερεό που ισορροπεί. Με δεδομένο ότι $F = 22,5N$ μπορούμε να βρούμε τις

$T_1, T_{\sigma\tau}$ λύνοντας σύστημα ως εξής :

Μεταφορική ισορροπία στερεού στον άξονα x:

$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F + T_{\sigma\tau} - T_1 = 0 \Leftrightarrow T_1 = F + T_{\sigma\tau} (1)$

Στροφική ισορροπία ως προς τον άξονα συμμετρίας :

$\Sigma\tau = 0 \Leftrightarrow F \cdot R_2 - T_{\sigma\tau} \cdot R_2 - T_1 \cdot R_1 = 0 \Leftrightarrow F \cdot 2R_1 = T_{\sigma\tau} \cdot 2R_1 + T_1 \cdot R_1 \Leftrightarrow$

$2F = 2T_{\sigma\tau} + T_1 (2)$

Από τις σχέσεις (1) ,(2) με αντικατάσταση :

$2F = 2T_{\sigma\tau} + F + T_{\sigma\tau} \Leftrightarrow F = 3T_{\sigma\tau} \Leftrightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{F}{3} = 7,5N \Leftrightarrow \boxed{T_{\sigma\tau} = 7,5N}$

Και τελικά από την σχέση (1) : $\boxed{T_1 = 30N}$.

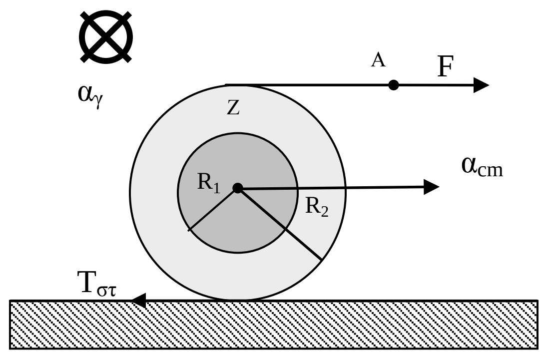
Δ3.

$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_1}{\pi R_1^2 \cdot h}$

$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{3m_1}{\pi (2R_1)^2 \cdot h} = \frac{3}{4} \frac{m_1}{\pi R_1^2 \cdot h} = \frac{3}{4} \rho_1$

Άρα $\boxed{\rho_1 > \rho_2}$

Δ4. Η στατική τριβή που δέχεται τώρα το στερεό δεν είναι η ίδια που δεχόταν στην ισορροπία και η φορά της επίσης δεν είναι δυνατόν να προβλεφτεί από την αρχή. Έστω ότι έχει φορά προς τα αριστερά.



Το στερεό επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας a_{cm} και σταθερή γωνιακή επιτάχυνση a_γ. Η σχέση που συνδέει τις δυο επιταχύνσεις είναι $\boxed{a_{cm} = a_\gamma \cdot R_2}$ γιατί R_2 είναι η ακτίνα κύλισης του στερεού.

Μεταφορική κίνηση άξονα συμμετρίας :

$\Sigma F_x = m_{o\lambda} \cdot \Leftrightarrow F - T_{\sigma\tau} = (m_1 + m_2) \cdot a_{cm} (3)$

Στροφική κίνηση ως προς τον άξονα συμμετρίας :

$\Sigma\tau = \mathrm{I} \cdot \alpha_\gamma \Leftrightarrow F \cdot R_2 + T_{\sigma\tau} \cdot R_2 = \mathrm{I} \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R_2} \Leftrightarrow F + T_{\sigma\tau} = \mathrm{I} \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R^2{}_2} (4)$

Από τις σχέσεις (3) ,(4) με πρόσθεση κατά μελή προκύπτει :

$a_{cm} = \frac{2F}{\frac{I}{R^2{}_2} + (m_1 + m_2)} = \frac{45}{\frac{13}{8} + \frac{32}{8}} m/s^2 \Leftrightarrow \boxed{a_{cm} = 8m/s^2}$

Δ5. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας το σημείο Z έχει:

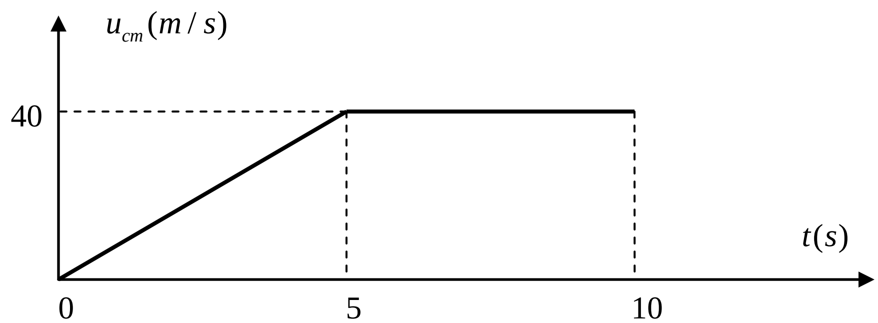
α) Επιτάχυνση $a_{cm} = 8m/s^2$ λόγω μεταφορικής κίνησης όλου του στερεού προς τα δεξιά β) Επιτρόχιος επιτάχυνση ιδιας κατευθυνσης με την a_{cm}, λόγω της γνήσιας περιστροφής ως προς τον άξονα συμμμετρίας, με τύπο $a_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma} \cdot R_{1} = 8 \cdot 0.5 = 4 m/s^2$

Η απόσταση R_1 είναι αυτή μεταξύ του σημείου Ζ και του άξονα περιστροφής.

Συνολικά $\boxed{a_{\varepsilon\varphi(\mathrm{Z})} = \alpha_{cm} + a_{\varepsilon\pi(\mathrm{Z})} = 8 + 4 = 12 m/s^2}$.

Δ6. Πρέπει να βρούμε ποια χρονική στιγμή t_3 ξετυλίγεται το σχοινί από τον μεγάλο δίσκο

Το μήκος του σχοινιού που ξετυλίγεται έχει σχέση μόνο με την στροφική κίνηση του στερεού στην ακτίνα τυλίγματος R_2. Το μήκος αυτό είναι ίσο επίσης με το τόξο ΔS_2 που έχει στραφεί ο μεγάλος δίσκος.



Έχουμε : $l = \Delta S_2 = \Delta\theta_2 \bullet R_2 = \left(\frac{1}{2} a_{\gamma} \cdot t_3^2\right) \bullet R_2 \Leftrightarrow 100 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot t_3^2 \cdot 1 \Leftrightarrow t_3 = 5s$.

Μέχρι την χρονική στιγμή t_3 ένα σημείο του άξονα συμμετρίας επιταχύνεται ομαλά με επιτάχυνση $a_{cm} = 8 m/s^2$. Τότε έχει αποκτήσει ταχύτητα $u_1 = a_{cm} \cdot t_3 = 8 \cdot 5 = 40 m/s$

Μόλις έχει ξετυλιχθεί το σχοινί το στερεό δεν δέχεται καμία οριζόντια δύναμη και σταματά αμέσως να επιταχύνεται. Η μεταφορική κίνηση γίνεται ευθύγραμμη ομαλή και η στροφική κίνηση επίσης ομαλή. Το στερεό δέχεται μόνο δυο κατακόρυφες δυνάμεις το ολικό βάρος και την κάθετη αντίδραση. Το κατώτερο σημείο δεν δέχεται καμία μορφή τριβής.
Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαινεται στο σχημα.

Δ7. Την χρονική στιγμή t_3 ξετυλίγεται το σχοινί από τον μεγάλο δίσκο και η δύναμη F σταματά να επιδρά στο σύστημα των δυο στερεών μέσω του σχοινιού. Ο ρύθμος με τον οποίο προσφέρει ενέργεια η F είναι η ισχύς της F και δίνεται απο τον τύπο $\boxed{P = F \cdot u_{\Gamma}}$ <u>οπου u_{Γ} η ταχύτητα του σημείου εφαρμογής της δύναμης F στο στερεό</u>. Το σημείο Γ είναι το ανώτερο σημείο του μεγάλου δίσκου και την χρονική στιγμή t_3 εχει ταχύτητα $u_{\Gamma} = 2u_1 = 80 m/s$.

Με αντικατάσταση $\boxed{P_F = F \cdot u_{\Gamma} = 22,5 \cdot 80 = 1800W}$.