ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Κανάρη 36, Δάφνη
Τηλ. 210 9713934 & 210 9769376

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΦΥΣΙΚΗ

Ο.Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

I. Α1. γ) Όταν πηγή και παρατηρητής κινούνται με σταθερές ταχύτητες (στην ίδια διεύθυνση) η συχνότητα f_A είναι σταθερή.

Α2. δ) $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1\cdot A_2\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}=A_1\cdot\sqrt{2}$

Α3. α) $\frac{u_1}{u_2}=\frac{\sqrt{2\cdot g\cdot\frac{h}{2}}}{\sqrt{2\cdot g\cdot\frac{3h}{4}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Α4. δ) $|A'|=\left|2A\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x_1-x_2}{2\lambda}\right|=\left|2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right|=A\cdot\sqrt{2}$

II. 1. Λ 2. Σ 3. Σ 4. Σ 5. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή η β)

Η διαφορά φάσης των δύο αρμονικών κινήσεων που εκτελεί ταυτόχρονα το σώμα είναι

$\Delta\varphi=|\omega_1-\omega_2|\cdot t$ (1)

Από την γραφική παράσταση η τιμή της είναι 4π την χρονική στιγμή t=1s. Διαδοχικά έχουμε:

$$4\pi=|\omega_1-\omega_2|\cdot 1 \Leftrightarrow 4\pi=|2\pi f_1-2\pi f_2|\cdot 1\Leftrightarrow 2=|f_1-f_2|\Leftrightarrow T_\delta=\frac{1}{|f_1-f_2|}=\frac{1}{2}s$$

Επίσης $f_\delta=2Hz$

Στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ ενός μηδενισμού τους πλάτους της

κίνησης και του επόμενου μηδενισμού, του σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 200 φορές άρα εκτελεί 100 ταλαντώσεις που η κάθε μια έχει λίγο διαφορετικό πλάτος από την άλλη.
Αυτό το χρονικό διάστημα είναι η περίοδος του διακροτήματος που είναι ίσο με 0,5s.
Η συχνότητα της κίνησης είναι :

$$f=\frac{N}{\Delta t}=\frac{100-\tau\alpha\lambda}{0,5s}=200Hz\ .$$

Από αυτήν προκύπτει η κυκλική συχνότητα της κίνησης

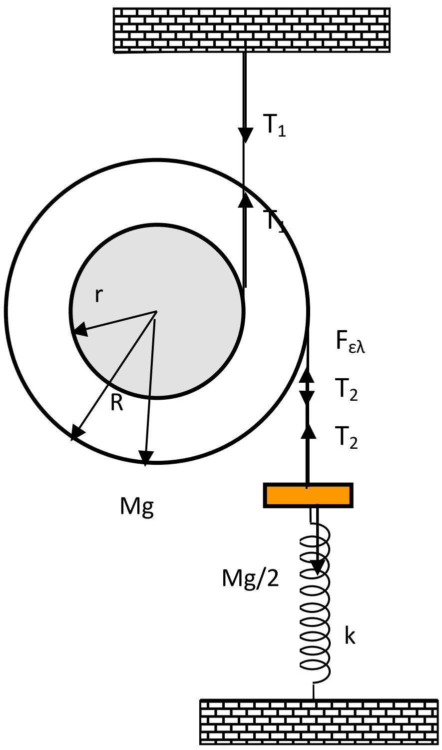
$$\omega=2\pi f=400\pi\frac{rad}{s}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

Τελικα : $x=2A\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t)\cdot\eta\mu(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t)\Leftrightarrow$

$$x=0,1\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi t)\cdot\eta\mu(400\pi t)$$

B2. Σωστή η α)

Στην τροχαλία ασκούνται το βάρος της Mg και οι δυνάμεις από τα δύο νήματα T_1 και T_2. Η τροχαλία ισορροπεί. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της Ο.



$$\Sigma\tau(o)=0\Rightarrow\tau_{T_1}+\tau_{T_2}+\tau_w=0\Leftrightarrow$$

$$T_1\cdot R-T_2\cdot 2R=0\Leftrightarrow T_1=2T_2$$

Επίσης η τροχαλία ισορροπεί μεταφορικά.

$$\Sigma F=0\Rightarrow T_1-M\cdot g-T_2=0\Rightarrow$$

$$T_1=M\cdot g+T_2\Rightarrow 2T_2=M\cdot g+T_2\Rightarrow$$

$$T_2=M\cdot g=2mg$$

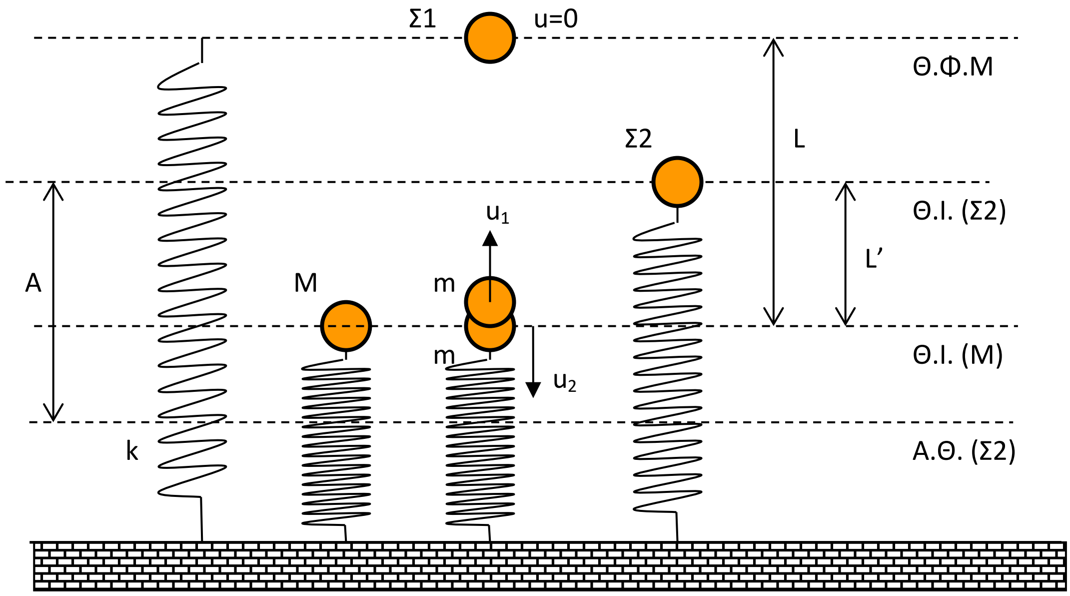
Το σώμα μάζας m ισορροπεί:

$$\Sigma F=0\Rightarrow \mathrm{T}_2+F_{\varepsilon\lambda}-w=0\Rightarrow 2mg-kx-mg=0\Rightarrow$$

$$mg=kx\Rightarrow x=\frac{mg}{k}\Rightarrow$$

$$\boxed{x=\frac{mg}{k}}$$

Β3. Σωστή η γ)



Έστω Σ1 το σώμα που αποκολλάται από το ελατήριο και Σ2 αυτό που παραμένει προσκολλημένο σε αυτό. Για τις θέσεις ισορροπίας του σώματος μάζας Μ πριν την διάσπαση και του Σ2 μετά την διάσπαση έχουμε:

$\Theta.\text{I}.(M)$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow k \cdot L = mg \Rightarrow L = \frac{mg}{k}$$

$\Theta.\text{I}.(\Sigma 2)$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow k \cdot L' = \frac{m}{2} g \Rightarrow L' = \frac{mg}{2k}$$

Στην έκρηξη ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής. Με θετική φορά ορμής προς τα πάνω έχουμε:

$$\vec{p}_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 = \frac{m}{2}\upsilon_1 - \frac{m}{2}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon$$

Άρα τα σώματα αποκτούν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες.

Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για το σώμα Σ1 που φτάνει στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου επιλέγοντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας την αρχική του θέση.

$$\text{K}_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = \text{K}_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \upsilon^2 + 0 = 0 + \frac{m}{2} \cdot g \cdot L \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gL}$$

Για το δεύτερο σώμα Σ2 εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ στην αρχική θέση και την ακραία θέση (πλάτος).

Ισχύει όπως φαίνεται στο σχήμα : $y = L - L' = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{2k} = \frac{mg}{2k}$

$$\mathrm{E} = \mathrm{K} + U \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{2}\upsilon^2 + \frac{1}{2}ky^2 \Leftrightarrow$$

$$kA^2 = \frac{m}{2}\upsilon^2 + ky^2 \Leftrightarrow kA^2 = \frac{m}{2}\cdot 2gL + k(\frac{mg}{2k})^2 \Leftrightarrow$$

$$kA^2 = \frac{m}{2}2\frac{mg}{k}g + k\frac{m^2g^2}{4k^2} \Leftrightarrow kA^2 = \frac{m^2g^2}{k} + \frac{m^2g^2}{4k} \Leftrightarrow$$

$$A^2 = \frac{5m^2g^2}{4k^2} \Leftrightarrow A = \sqrt{5}\cdot\frac{mg}{2k} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{A = \sqrt{5}\cdot\frac{mg}{2k}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η κοιλία (x=0) φτάνει για πρώτη φορά στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης μετά από χρόνο $\frac{T}{4}$ όπου T η περίοδος.

Άρα : $t_1 = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4t_1 \Rightarrow T = 4s, \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} rad/s$

Η ενέργεια ταλάντωσής της είναι:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 \mathrm{A}_k^2 \Rightarrow \mathrm{A}_k = \sqrt{\frac{2\mathrm{E}}{m\omega^2}} \Rightarrow \mathrm{A}_k = \sqrt{\frac{2\cdot 2\pi^2 10^{-8}}{10^{-4}\frac{\pi^2}{4}}} = \sqrt{16\cdot 10^{-4}} = 4\cdot 10^{-2} m$$

Δηλαδή : $2\cdot A = 4\cdot 10^{-2} m$

Επίσης : $\lambda = \upsilon\cdot\mathrm{T} = 2\cdot 4 = 8m$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$$

$$o\pi\acute{o}\tau\varepsilon : y = 4\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{8}\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{4} \Rightarrow y = 4\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}\eta\mu\frac{\pi t}{2}(SI)$$

Γ2. Οι θέσεις των δεσμών είναι:

$x_\Delta = \frac{(2N+1)\lambda}{4}$ με $\mathrm{N} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

Οπότε οι δεσμοί που υπάρχουν μεταξύ των θέσεων $x_1 = -8m$ και $x_2 = +12m$ είναι 5 και είναι οι θέσεις τους φαίνονται παρακάτω:

$$x_{\Delta 1} = \frac{\lambda}{4} = \frac{8}{4} = +2m - x_{\Delta 2} = \frac{3\lambda}{4} = \frac{3\cdot 8}{4} = +6m$$
$$x_{\Delta 3} = \frac{5\lambda}{4} = \frac{5\cdot 8}{4} = +10m - x_{\Delta 4} = -\frac{\lambda}{4} = \frac{8}{4} = -2m$$
$$x_{\Delta 5} = -\frac{3\lambda}{4} = \frac{3\cdot 8}{4} = -6m$$

Γ3. Η ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου δίνεται από την σχέση:

$$\upsilon = \omega \cdot \left(2\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}$$

Επομένως για το σημείο Λ έχουμε:

$$\upsilon = \frac{\pi}{2} \cdot \left(4\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{2} \Rightarrow \upsilon = 2\pi \cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi 3}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi 2}{2}$$
$$\upsilon = 2\pi \cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \upsilon = 2\pi \cdot 10^{-2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-1)$$
$$\upsilon = \pi \cdot 10^{-2}\sqrt{2}m/s$$

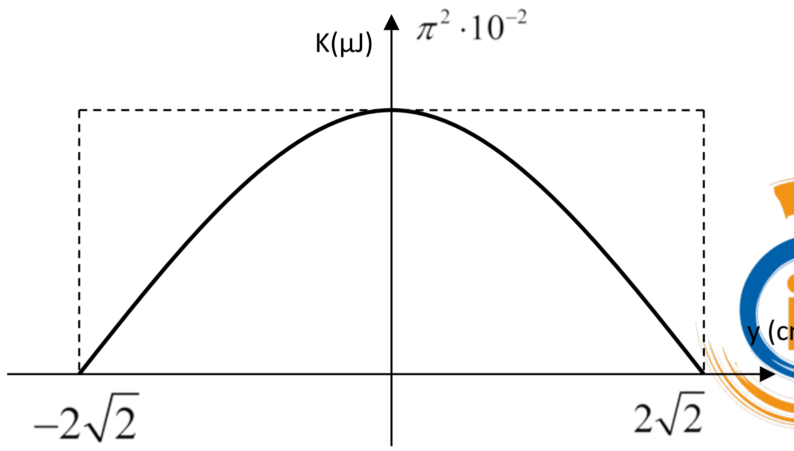
Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Λ είναι:

$$A_{\Lambda}^{'} = \left| 2\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \right| = \left| 4\cdot 10^{-2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \right| = \left| 4\pi(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \right| = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-2}m$$

Και η ενέργεια ταλάντωσής του είναι:

$$K_{\max} = E = \frac{1}{2}DA_{\Lambda}^{'2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A_{\Lambda}^{'2} = \frac{1}{2}10^{-4}\frac{\pi^2}{4}4\cdot 2\cdot 10^{-4} \Rightarrow \mathrm{E} = 10^{-8}\pi^2 J$$

Η εξίσωση της γραφικής είναι $K = E - \frac{1}{2}D_{\Lambda} \cdot y^2$ με $-A'_{\Lambda} \le y \le A'_{\Lambda}$.Η ζητούμενη γραφική παράσταση:

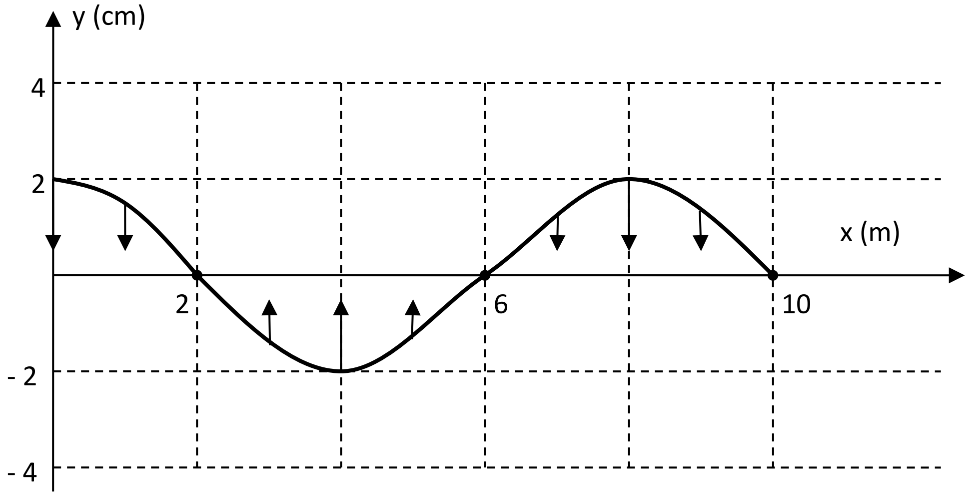


Γ4. Η γραφική παράσταση γίνεται μεταξύ των σημείων x=0 που είναι κοιλία του στάσιμου κύματος και του σημείου με θέση x=10m που είναι ο τρίτος δεσμός δεξιά της αρχής μέτρησης Ο.
Βρίσκουμε την δοθείσα χρονική στιγμή την απομάκρυνση της αρχής Ο από την θέση ισορροπίας της καθώς και την φορά κίνησής της. (Από το πρόσημο της ταχύτητας)

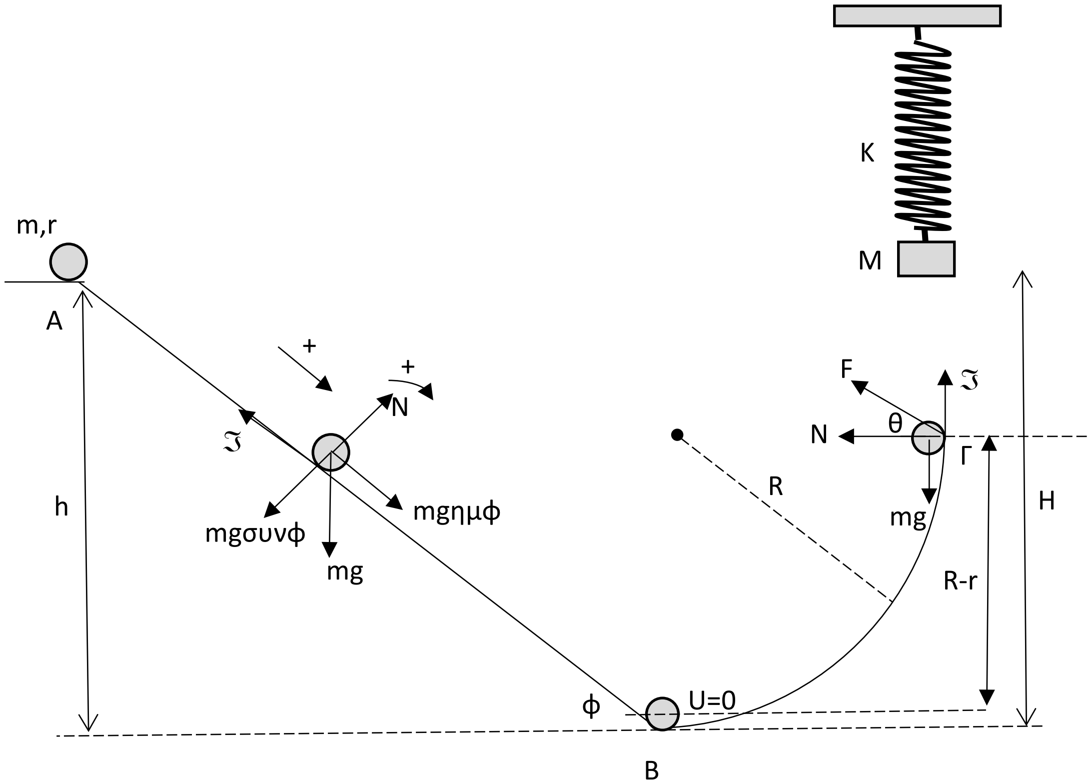
$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi \cdot 0}{8}) \cdot \eta\mu(\frac{2\pi \cdot \frac{5}{3}}{4}) = 2A \cdot \eta\mu(\frac{5\pi}{6}) = 2A \cdot \frac{1}{2} = A = 2 \cdot 10^{-2} m$$

$$u = \omega \cdot 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi \cdot 0}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi \cdot \frac{5}{3}}{4} = \omega \cdot 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} = -\omega \cdot A \cdot \sqrt{3} < 0$$

Το στιγμιότυπο είναι το παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Δ



Α. Δ1. Κατά την κίνηση της σφαίρας από το Α στο Β ισχύουν ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής και ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης.
Έτσι

$$\Sigma F_X = m \cdot a \rightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi - \mathfrak{I} = ma$$

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_\gamma \rightarrow \mathfrak{I} \cdot r = {}^2/_5 \cdot m \cdot r^2 \cdot \alpha_\gamma \rightarrow \mathfrak{I} = \frac{2}{5} m \cdot a$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε ότι : $\alpha = \frac{30}{7} m/s^2$

Δ2. Όταν η σφαίρα φτάσει στο σημείο Β θα έχει διανύσει απόσταση AB=S η οποία είναι ίση με $S = \frac{h}{\eta\mu\varphi} = \frac{70}{6} m$
έτσι $S = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \rightarrow t = \frac{7}{3} \sec \kappa\alpha\iota\ u = at = 10m/s$

Δ3. Όταν η σφαίρα περνά από το σημείο Γ , το δάπεδο της ασκεί δύο δυνάμεις, την κάθετη αντίδραση Ν και την στατική τριβή ℑ.
Η κλίση της δύναμης αυτής θα είναι εφθ=ℑ/Ν
Για την εύρεση της Ν :
Επειδή το κέντρο της σφαίρας κινείται σε κυκλική τροχιά με ακτίνα R-r, γύρω από το κέντρο του τεταρτοκυκλίου, η Ν (ως μοναδική δύναμη στον άξονα της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου) Δηλαδή $N = \frac{m \cdot u_\Gamma^2}{R-r}$

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα στο σημείο Γ θα εφαρμόσουμε ΑΔΜΕ από το σημείο Β έως το Γ. Ορίζουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο της σφαίρας στην θέση Β. Έτσι στην θέση Γ το ύψος του κέντρου της σφαίρας θα είναι R-r=$h_Γ$=5,25m

ΑΔΜΕ (Β—Γ)

$$K_B + U_B = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}mu_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 = \frac{1}{2}mu_\Gamma^2 + \frac{1}{2}I\omega_\Gamma^2 + mg(R-r)$$

Αντικαθιστώντας το $I = \frac{2}{5}mr^2$ $και\ ότι\ η\ u = \omega r$, $έχουμε\ u_\Gamma = 5m/s$

και $N = \frac{m \cdot u_\Gamma{}^2}{R-r} = \frac{25}{5,25}N = \frac{100}{21}N$

Για να υπολογίσουμε την στατική τριβή εφαρμόζουμε τους θεμελιώδεις νόμους για την μεταφορική και στροφική κίνηση στο σημείο Γ,

$$\Sigma F = m \cdot a \rightarrow mg - \Im = ma$$

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_\gamma \rightarrow \Im \cdot r = {}^{2}/_{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \alpha_\gamma \rightarrow \Im = \frac{2}{5}m \cdot a$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι $\Im = \frac{20}{7}N$

Άρα: εφθ=ℑ/N=3/5

Β. Δ4. Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος σε ύψος Η από το έδαφος και αφού έχει εγκαταλείψει το τεταρτοκύκλιο, πρέπει να σκεφτούμε ότι:

Η μοναδική δύναμη που ασκείται στην σφαίρα είναι το βάρος της άρα δεν ασκείται καμία ροπή στην σφαίρα, οπότε η περιστροφική της κινητική ενέργεια παραμένει σταθερή.

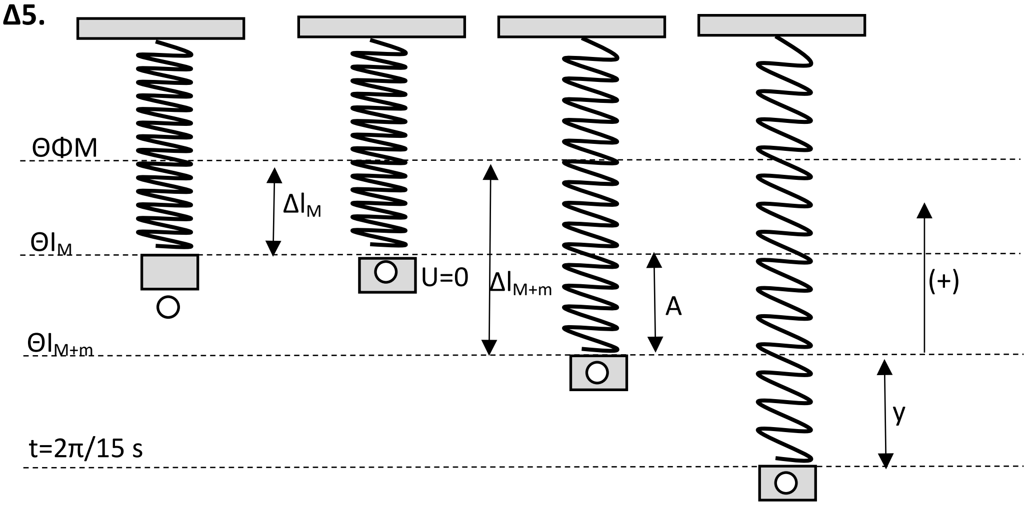
Επίσης το ύψος από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας που έχει ανέβει η σφαίρα μέχρι το Γ είναι H-r=6,5m.

ΑΔΜΕ (Γ—Δ)

$$K_\Delta + U_\Delta = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}mu_\Delta^2 + \frac{1}{2}I\omega_\Delta^2 + mg(H-r) = \frac{1}{2}mu_\Gamma^2 + \frac{1}{2}I\omega_\Gamma^2 + mg(R-r) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mu_\Delta^2 + mg(H-r) = \frac{1}{2}mu_\Gamma^2 + mg(R-r) \rightarrow u_\Delta = 0$$

Δ5.



Η σφαίρα έχοντας ταχύτητα u=0 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Μ , έτσι το συσσωμάτωμα που δημιουργείται εκτελεί α.α.τ. ξεκινώντας με ταχύτητα u=0.
Το συσσωμάτωμα δηλαδή ξεκινά από ακραία θέση , η οποία είναι η αρχική θέση ισορροπίας του Μ η οποία απέχει από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου απόσταση Δl_M, η οποία υπολογίζεται από την συνθήκη ισορροπίας του Μ

$$\Sigma F = 0 \rightarrow \Delta l_M = \frac{Mg}{K} = 0{,}3m$$

Η θέση ισορροπίας του συσσωματώματος όμως απέχει από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου απόσταση $\Delta l_{M,m}$, η οποία είναι ίση με

$$\Sigma F = 0 \rightarrow \Delta l_{M,m} = \frac{(M+m)g}{K} = 0{,}4m$$

Από την αφαίρεση των δύο αυτών αποστάσεων έχουμε ότι το πλάτος Α=0,1m και αν θεωρήσουμε σαν θετική φορά προς τα πάνω και για t=0 την δημιουργία του συσσωματώματος, έχουμε :

y=A·ημ(ωt+ϕ_0), με: $\omega = \sqrt{\frac{K}{M+m}} = 5r/s$

Υπολογισμός ϕ_0:

Για t=0 και y=A έχουμε ϕ_0=π/2 rad, άρα:

$$y = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)(S.I)$$

Δ6. Την χρονική στιγμή t=2π/15 sec, το σώμα θα βρίσκεται στην θέση :

$$y = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(5 \cdot \frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -0{,}05m$$

Σε αυτή την θέση το ελατήριο είναι επιμηκυμένο από την Θ.Φ.Μ κατά Δl_{M+m}+|y|=0,4m+0,05m=0,45m.
Οπότε:

$$\frac{F_{\varepsilon\lambda}}{F_{\tau\alpha\lambda}} = \frac{K(\Delta l_{M.m} + y)}{Ky} = \frac{0{,}45}{0{,}05} = 9$$

<u>**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:**</u>

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΑΡΗΣ – ΚΑΤΣΑΡΟΥ ΚΑΤΕΡΙΝΑ
ΧΡΥΣΟΒΕΡΓΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ