

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι:

«Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.»

Μονάδες 7

A2. Τι ονομάζουμε αρχική ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα σε κάθε περίπτωση.

Μονάδες 4 (2+2)

A4. Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Οποιαδήποτε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m .

β. Αν οι f', g' είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\alpha} f'(x)g(x)dx .$$

γ. Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

δ. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

ε. Αν για οποιαδήποτε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι σταθερή στο A .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$, $x \geq 0$.

B1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 6

B2. Αν $h(x) = f^{-1}(x) = \ln(x-2)$, $x > 2$ να βρείτε τη συνάρτηση $h \circ g$.

Μονάδες 6

B3. Αν $\varphi(x) = (h \circ g)(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$, $x > 1$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ έχει μόνο κατακόρυφη ασύμπτωτη την οποία και να βρείτε.

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\varphi(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x-4} \right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x - x + e, & x > 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases}$, ($\lambda \in \mathbb{R}$), η οποία είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\lambda = e$ και στη συνέχεια ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Μονάδες 7

Για $\lambda = e$:

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία έχει κλίση 1.

Μονάδες 6

Γ4. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\alpha \neq 1$, $\beta \neq e$ να δείξετε ότι η εξίσωση

$\frac{f(\alpha) - e + 1}{\alpha - 1} + \frac{f(\beta) - \beta}{1 - \sin \beta} = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{x+1} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε μοναδικό σημείο x_0 και στη συνέχεια ότι $x_0 \in (-1, 0)$.

Μονάδες 7

Για το x_0 του ερωτήματος Δ2:

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x_0) < (x_0 + 1) \cdot f'(x_0 + 1)$.

Μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - \int_{x_0}^0 x \cdot f''(x) dx}{\eta\mu(x - x_0)} \right] = 0$.

Μονάδες 6

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !