ΚΥΡΙΑΚΗ 8 ΜΑΪΟΥ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

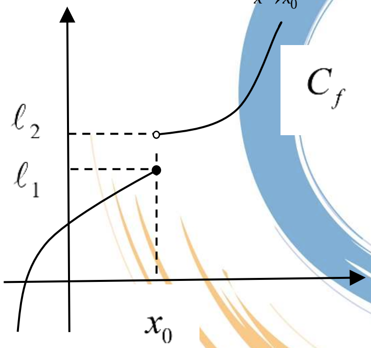
Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ

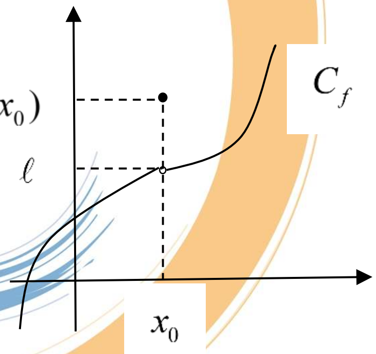
ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 99.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 185.

Α3. Μια συνάρτηση f **δεν** είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν: α) Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, β) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αλλά $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$





Α4. α. Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, οπότε

$$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) \overset{f:\text{συν.}}{\underset{f:\uparrow}{=}} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (2,+\infty),$$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Για τον τύπο της f^{-1} έχουμε: Για κάθε $y\in(2,+\infty)$

$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y \Leftrightarrow e^x+2=y \Leftrightarrow e^x=y-2 \Leftrightarrow x=\ell n(y-2)$.

Άρα $f^{-1}(x)=\ell n(x-2),\ x\in(2,+\infty)$.

Β2. $D_{h\circ g} = \left\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_h\right\} = \left\{x\geq 0 \,/\, \sqrt{x}+1>2\right\} = \left\{x\geq 0 \,/\, x>1\right\} = (1,+\infty)$ και

$$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\sqrt{x}+1\right)=\ell n\left(\sqrt{x}+1-2\right)=\ell n\left(\sqrt{x}-1\right).$$

B3. Η φ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά συνεχών.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ell n\left(\sqrt{x}-1\right)\underset{\substack{x\to 1^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=\sqrt{x}-1}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ell nu=-\infty$, οπότε η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_φ.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell n\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\right]=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n\left(\sqrt{x}-1\right)\underset{\substack{x\to+\infty\\ u\to+\infty}}{\overset{u=\sqrt{x}-1}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ell nu=+\infty$.

Άρα η C_φ δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4. Για κάθε x κοντά στο 4 έχουμε:

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x-4}\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\varphi(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x-4}\right|\le|\varphi(x)|\Leftrightarrow-|\varphi(x)|\le\varphi(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x-4}\le|\varphi(x)|.$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 4}\left(-|\varphi(x)|\right)=\lim\limits_{x\to 4}|\varphi(x)|=0$.

Επομένως από Κ.Π. έχουμε $\lim\limits_{x\to 4}\left[\varphi(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x-4}\right]=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, επομένως και στο 0. Οπότε έχουμε

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ell nx-x+e)=\lambda\Leftrightarrow\lambda=e$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ell nx)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\cdot\ell nx-x+e-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ell nx-1)=-\infty$, επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=(x\cdot\ell nx-x+e)'=\ell nx+1-1=\ell nx$.

$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\ell nx\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
	Τ.Μ. $f(0)=e$		Ο.Ε. $f(1)=e-1$		

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0, ίσο με $f(0)=e$ και ολικό ελάχιστο στο 1, ίσο με $f(1)=e-1$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως λογαριθμική, με $f''(x)=(\ell nx)'=\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, επομένως η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Γ3. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, οπότε $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \ell nx_0=1 \Leftrightarrow x_0=e$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:
$y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e) \Leftrightarrow y-e=1\cdot(x-e) \Leftrightarrow y=x$.

Γ4. $\dfrac{f(\alpha)-e+1}{x-1}+\dfrac{f(\beta)-\beta}{1-\sigma\upsilon\nu x}=0 \Leftrightarrow (1-\sigma\upsilon\nu x)\big(f(\alpha)-e+1\big)+(x-1)\big(f(\beta)-\beta\big)=0$.
Θέτουμε $g(x)=(1-\sigma\upsilon\nu x)\big(f(\alpha)-e+1\big)+(x-1)\big(f(\beta)-\beta\big)$, $x\in[0,1]$.
Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών.
Από το Γ2. και το Γ3. έχουμε ότι η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και η ευθεία $y=x$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=e$, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$. Επομένως έχουμε $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=e$.
Συνεπώς $g(0)=-\big(f(\beta)-\beta\big)=\beta-f(\beta)<0$, αφού $\beta\neq e$.
Από το Γ2. έχουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1, ίσο με $f(1)=e-1$.
Οπότε έχουμε $f(x)\geq e-1$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.
Συνεπώς $g(1)=(1-\sigma\upsilon\nu 1)\big(f(\alpha)-e+1\big)>0$, αφού $1-\sigma\upsilon\nu 1>0$ και $\alpha\neq 1$.
Επομένως $g(0)\cdot g(1)<0$ και ισχύει το Θ. Bolzano.
Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών και δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=\left(x\cdot e^{x+1}-x\right)'=e^{x+1}+x\cdot e^{x+1}-1$ και

$f''(x)=\left(e^{x+1}+x\cdot e^{x+1}-1\right)'=e^{x+1}+e^{x+1}+x\cdot e^{x+1}=(x+2)\cdot e^{x+1}$.

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot e^{x+1}\geq 0 \overset{e^{x+1}>0}{\Leftrightarrow} x\geq -2$.

x	$-\infty$ -2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

Σ.Κ. $(-2, f(-2))$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-2]$ και κυρτή στο $[-2,+\infty)$.
Η C_f έχει σημείο καμπής το $(-2, f(-2))$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε οι πιθανές θέσεις ακροτάτων είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η $f'(x)$.
Από το Δ1 έχουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2,+\infty)$. Οπότε

$$f'\left((-\infty,-2]\right) \underset{f':\downarrow}{\overset{f':\sigma\upsilon\nu.}{=}} \left[f'(-2), \lim_{x\to-\infty} f'(x)\right) = \left[-1-\frac{1}{e},-1\right), \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left((x+1)e^{x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{-x-1}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x-1}} = 0.$$

Επομένως $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-2]$.

$$f'\left((-2,+\infty)\right) \underset{f':\uparrow}{\overset{f':\sigma\upsilon\nu.}{=}} \left(f'(-2), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right) = \left(-1-\frac{1}{e},+\infty\right).$$

Το 0 περιέχεται στο $f'\left((-2,+\infty)\right)$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-2,+\infty)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-2,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Επίσης για $-2<x<x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(-2)<f'(x)<f'(x_0) \Leftrightarrow -1-\dfrac{1}{e}<f'(x)<0$ και

για $x>x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x)>0$.

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα το x_0 είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Είναι $f'(-1)=-1$, $f'(x_0)=0$ και $f'(0)=e-1$, οπότε

$f'(-1)<f'(x_0)<f'(0) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} -1<x_0<0$.

[Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $x_0\in(-1,0)$ εφαρμόζοντας το Θ. Rolle για την f στο $[-1,0]$ ή το Θ. Bolzano για την f' στο $[-1,0]$]

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $[-1,x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,x_0)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
Από το Θ.Μ.Τ. έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(-1,x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(-1)}{x_0+1} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x_0)}{x_0+1} \quad (1)$$

$\xi\in(-1,x_0)$ οπότε $\xi<x_0<x_0+1$. Επομένως

$$\xi<x_0+1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(x_0+1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0)}{x_0+1}<f'(x_0+1) \overset{(x_0+1>0)}{\Leftrightarrow} f(x_0)<(x_0+1)f'(x_0+1).$$

[Μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα, δείχνοντας ότι $f(x_0)<0$ και $(x_0+1)\cdot f'(x_0+1)>0$]

Δ4. $\int_{x_0}^{0} x\cdot f''(x)dx=\int_{x_0}^{0} x\cdot\left(f'(x)\right)'dx=\left[x\cdot f'(x)\right]_{x_0}^{0}-\int_{x_0}^{0}(x)'\cdot f'(x)dx\overset{f'(x_0)=0}{=}$

$=0-\int_{x_0}^{0} f'(x)dx=-\left[f(x)\right]_{x_0}^{0}\overset{f(0)=0}{=}f(x_0)$. Οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-\int_{x_0}^{0} x\cdot f''(x)dx}{\eta\mu(x-x_0)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{\eta\mu(x-x_0)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu(x-x_0)}=\frac{f'(x_0)}{1}=0$$, αφού

η f και η f' είναι συνεχείς στο x_0, οπότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ και $\lim_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$.

[Μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο και ως εξής:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-\int_{x_0}^{0} x\cdot f''(x)dx}{\eta\mu(x-x_0)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{\eta\mu(x-x_0)}\overset{(x\neq x_0)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{1}=0$$ *]*