ΚΥΡΙΑΚΗ 8 ΜΑΪΟΥ 2022

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**
**ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Επιμέλεια διαγωνίσματος:** ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

## ΘΕΜΑ Α

α) i) Λ  ii) Σ  iii) Λ  iv) Σ  v) Σ

β) Σχολικό βιβλίο σελ. 90

γ) i) $\alpha_\nu = \alpha_1 + \omega(\nu - 1),\ \nu \in \mathbb{N}$

ii) $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1},\ \nu \in \mathbb{N}$

iii) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

## ΘΕΜΑ Β

α) Είναι $|2x-5| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2x-5 \le 3 \Leftrightarrow 2 \le 2x \le 8 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in [1,4]$ (1)

Το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 1+8 = 9$$

και ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{4} = 1 \\ \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$



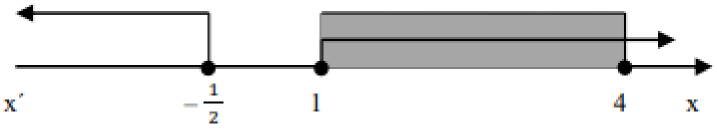
Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2 - x - 1$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Επομένως ισχύει ότι:

$$2x^2 - x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x \le -\frac{1}{2} \quad ή \quad x \ge 1\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty) \quad (2)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον ίδιο άξονα αριθμών:




Όπως φαίνεται και στο σχήμα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι: $1 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in [1,4]$

**ΘΕΜΑ Γ**

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f$ πρέπει:

$$x^2-4 \ne 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \ne 0 \Leftrightarrow (x \ne 2 \quad \text{και} \quad x \ne -2)$$

Άρα η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

β) Για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4}=\frac{x(x^2-3x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-1)}{(x+2)}=\frac{x^2-x}{x+2}$$

γ) Η εξίσωση $f(x)=2$ γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\frac{x^2-x}{x+2}=2 \Leftrightarrow x^2-x=2(x+2) \Leftrightarrow x^2-x=2x+4 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow (x=4 \quad \text{ή} \quad x=-1)$$

δ) Είναι $f(1)=\dfrac{1^2-1}{1+2}=\dfrac{1-1}{3}=0$ και άρα $f(f(1))=f(0)=\dfrac{0^2-0}{0+2}=0$

**ΘΕΜΑ Δ**

α) Η εξίσωση γράφεται:

$$(x-2)^2=\lambda(4x-3) \Leftrightarrow x^2-4x+4=4\lambda x-3\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+4-4\lambda x+3\lambda=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-(4+4\lambda)x+4+3\lambda=0 \Leftrightarrow x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0$$

β) Το τριώνυμο $x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda$ έχει συντελεστές $\alpha=1,\ \beta=-4(1+\lambda),\ \gamma=4+3\lambda$

και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=[-4(1+\lambda)]^2-4\cdot 1\cdot(4+3\lambda)=16+32\lambda+16\lambda^2-16-12\lambda=16\lambda^2+20\lambda$$

Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν ισχύει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 16\lambda^2+20\lambda \Leftrightarrow 4\lambda^2+5\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda(4\lambda+5)>0 \Leftrightarrow \left(\lambda<-\frac{5}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda>0\right)$$

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(1+\lambda)}{1} = 4 + 4\lambda \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4+3\lambda}{1} = 4 + 3\lambda$$

ii) Είναι:

$$A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) = 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 = 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 =$$

$$= 16(4+3\lambda) - 12(4+4\lambda) + 9 = 64 + 48\lambda - 48 - 48\lambda + 9 = 25$$

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ

Δάφνη - Άγ. Δημήτριος