ΚΥΡΙΑΚΗ 17 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΑΝΔΡΕΑΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

ΘΕΜΑ Α

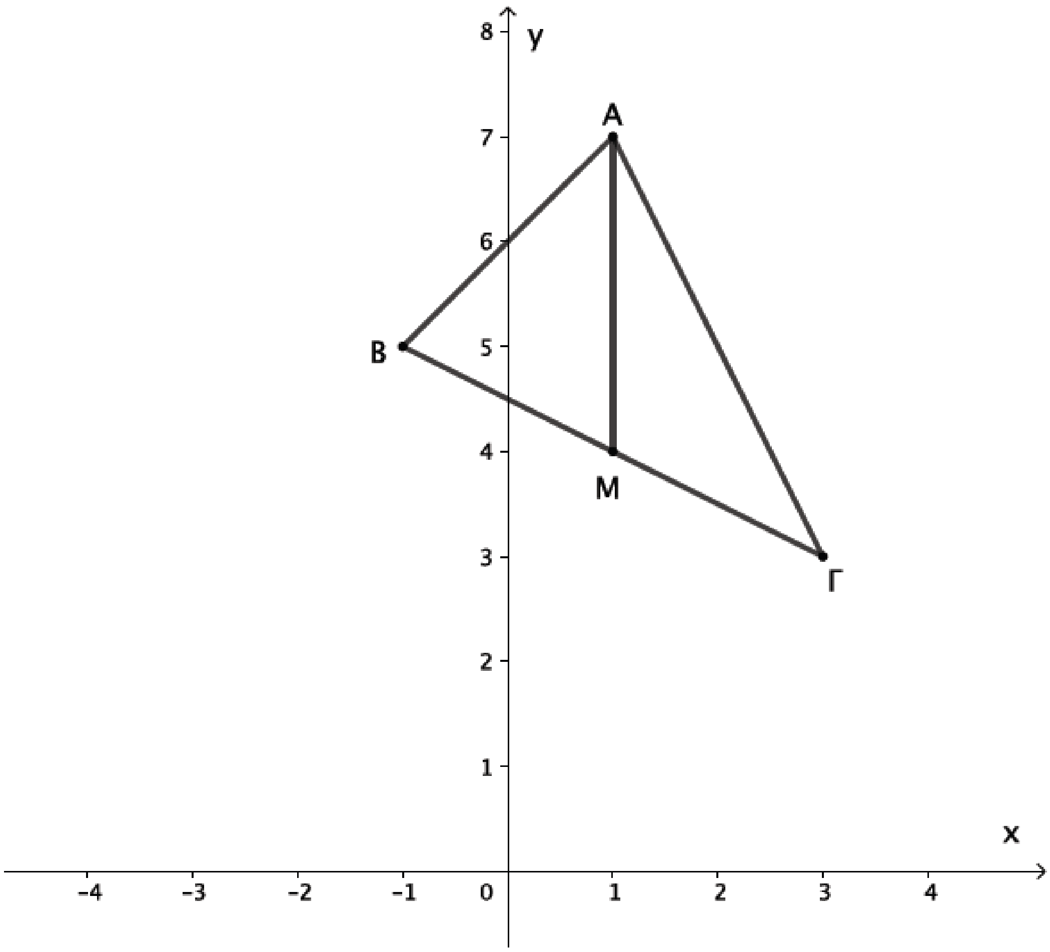
Α. Φροντιστηριακό βιβλίο σελίδα 70 πλαίσιο 4 ή σχολικό σελίδα 83

Β. Φροντιστηριακό βιβλίο σελίδα 88 πλαίσιο 1 ή σχολικό σελίδα 89

Γ. Φροντιστηριακό βιβλίο σελίδα 104 ή σχολικό σελίδα 105

Δ. Σ – Σ – Λ – Λ – Σ

ΘΕΜΑ Β



α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)\right|$$

όπου

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A, y_B - y_A\right) = (-1-1, 5-7) = (-2,-2)$$
$$\overrightarrow{B\Gamma} = \left(x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B\right) = (3+1, 3-5) = (4,-2)$$

Οπότε:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|4+8| = 6$$

β)

i. Το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ είναι:

$$M\left(\frac{x_B + x_\Gamma}{2}, \frac{y_B + y_\Gamma}{2}\right) = (1,4)$$

ii. Παρατηρούμε ότι για τα σημεία Α και Μ είναι $x_M = x_A = 1$. Επομένως, η ευθεία ΑΜ είναι κατακόρυφη (δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας), οπότε έχει εξίσωση $x = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

α) C: $y^2 = 4x$ οπότε p=2 άρα $E\left(\frac{p}{2},0\right) = (1,0)$ και $(\delta): x = -1$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι $y_A y = \rho\left(x + x_A\right)$ δηλαδή $4y = 2\left(x+4\right) \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{2}x + 4$

γ) Η μία εστία της έλλειψης θα είναι η $E\left(1,0\right)$ οπότε $\gamma = 1$. Η εκκεντρότητα είναι

$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{3}$ άρα $\alpha = 3$. Ισχύει $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 9 - 1 = 8$. Επομένως η έλλειψη

έχει εξίσωση: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

ΘΕΜΑ Δ

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $\mathrm{K}(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β) Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=\rho$ και αφού $d(K,\varepsilon)>\rho$ ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta=-2$. Έτσι $(\eta): y=-2x+\beta \Leftrightarrow 2x+y-\beta=0$

Για να εφάπτεται η ευθεία (η) στον κύκλο πρέπει και αρκεί να απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή

$$d(K,\eta)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1-\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta|=5 \Leftrightarrow$$
$$1-\beta=5 \quad ή \quad 1-\beta=-5 \quad \Leftrightarrow \quad \beta=-4 \quad ή \quad \beta=6$$

Συνεπώς έχουμε δύο εφαπτομένες τις $\eta_1: 2x+y+4=0$ και $\eta_2: 2x+y-6=0$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

δ) Είναι $d(K,\eta_1)=d(K,\eta_2)=\rho$ δηλαδή το $\mathrm{K}(2,-3)$ ισαπέχει από τις ευθείες $(\eta_1),(\eta_2)$ οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλή τους. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη (η_3) ως παράλληλη στις $(\eta_1),(\eta_2)$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\eta_3}=-2$.

Τελικά η ζητούμενη μεσοπαράλληλη είναι η $(\eta_3): y+3=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+1$.