

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A3. Θεωρούμε τον ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε $x \in \Delta$.»

α) Να απαντήσετε αν είναι **Αληθής** ή **Ψευδής** ο παραπάνω ισχυρισμός.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4 (1+3)

A4. Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

α. Αν για οποιοδήποτε ζεύγος συναρτήσεων f, g ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Μπορεί ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ. Αν για οποιαδήποτε συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η f στο x_0 παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx$.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο A και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε σημείο x του A , τότε η f δεν κατ' ανάγκη σταθερή στο A .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 7

B2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της είναι η

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right), x \in (0, 2).$$

Μονάδες 8

B3. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > \frac{2e}{e+1}$.

Μονάδες 5

B4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $y = x$ μοναδικό κοινό σημείο για $x \in (0, 2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \frac{x + \ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να βρείτε τη μονοτονία της f στο $[1, +\infty)$.

Μονάδες 7

Γ2. Να εξετάσετε αν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι ισχύει:

$$\left| \ln \frac{a^2 + 1}{\beta^2 + 1} \right| \leq |a - \beta|, \text{ για } a, \beta \in \mathbb{R} \text{ με } a < \beta.$$

Μονάδες 8

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f έχει 2 σημεία καμπής των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία καμπής και να

αποδείξετε ότι ισχύει $\ln\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) \leq x - 1$ για κάθε $x \geq 1$.

Μονάδες 7

Σας ευχόμαστε επιτυχία !!!

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ

Φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης
Δάφνη - Αγ. Δημήτριος