ΚΥΡΙΑΚΗ 20 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 60

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 33

Α3. 1) Λ **2)** Σ **3)** Λ **4)** Σ **5)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Για να προσδιορίσουμε το κοινό σημείο ευθειών (ε_1) και (ε_2), αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους.

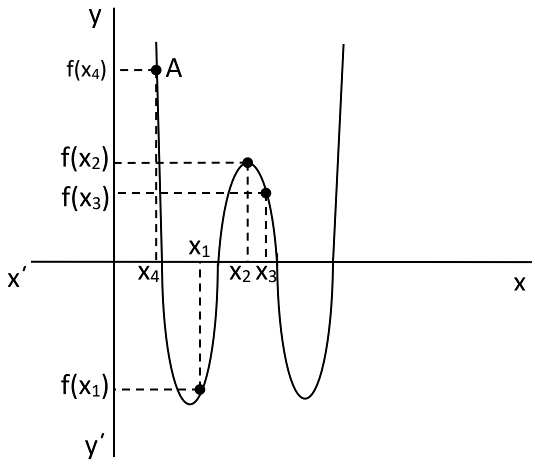
$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-2y=-2 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4x+\cancel{2y}=12 \\ x-\cancel{2y}=-2 \end{cases} (+)$$
$$\overline{5x=10 \Leftrightarrow x=2}$$

Τότε αφού $2x+y=6 \overset{x=2}{\Leftrightarrow} 4+y=6 \Leftrightarrow y=2$

Άρα το κοινό σημείο των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι το Μ(2,2).

β) Η ευθεία (ε_3) διέρχεται από το σημείο Μ(2,2) αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (ε_3).
Πράγματι: $3\cdot 2+2=8 \Leftrightarrow 8=8$ ισχύει.

Β2. α) Από την δοσμένη γραφική παράσταση, αν προβάλλουμε στον y'y άξονα τα σημεία με τετμημένες x_1, x_2, x_3 συμπεραίνουμε ότι $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$.



β) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι είναι γνησίως μονότονη κατά διαστήματα.

Πράγματι:

Αν ήταν γνησίως αύξουσα, τότε για
$x_1 < x_2 < x_3$ θα ίσχυε $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$

ενώ αν ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε για $x_1 < x_2 < x_3$ θα ίσχυε $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$.

Όμως από το ερώτημα (α) έχουμε ότι $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

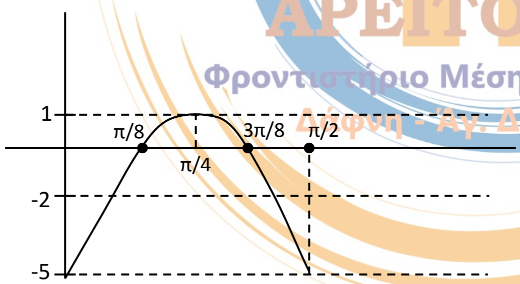
γ) Η γραφική παράσταση δεν παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο σημείο x_2 γιατί δεν ισχύει ότι $f(x) \le f(x_2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (όπως φαίνεται από το σχήμα $f(x_4) > f(x_2)$)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. $f(x) = \lambda - 3\sigma\upsilon\nu 4x = -3\sigma\upsilon\nu 4x + \lambda$

- $MIN_f = -5 \Leftrightarrow -|-3| + \lambda = -5 \Leftrightarrow -3 + \lambda = -5 \Leftrightarrow \lambda = -5 + 3 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -2} \quad (1)$
- $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$
- $MAX_f = |-3| + \lambda = 3 + \lambda \overset{(1)}{=} 3 - 2 = 1$

Γ2.



Γ3. $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 2 \Leftrightarrow -3\sigma\upsilon\nu 4x - \cancel{2} = 3\sigma\upsilon\nu x - \cancel{2}$

$$\Leftrightarrow -3\sigma\upsilon\nu 4x = 3\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x = \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$$

- $4x = 2\kappa\pi + \pi - x \Leftrightarrow 5x = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = \dfrac{2\kappa\pi}{5} + \dfrac{\pi}{5},\ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $4x = 2\kappa\pi - (\pi - x) \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi - \pi + x \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi - \pi \Leftrightarrow x = \dfrac{2\kappa\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\dfrac{ημ^2x}{1-σφx}+\dfrac{συν^2x}{1-εφx}=\dfrac{ημ^2x}{1-\dfrac{συνx}{ημx}}+\dfrac{συν^2x}{1-\dfrac{ημx}{συνx}}=\dfrac{ημ^2x}{\dfrac{ημx-συνx}{ημx}}+\dfrac{συν^2x}{\dfrac{συνx-ημx}{συνx}}=$

$$=\frac{ημ^3x}{ημx-συνx}+\frac{συν^3x}{συνx-ημx}=\frac{ημ^3x}{ημx-συνx}-\frac{συν^3x}{ημx-συνx}=$$

$$=\frac{ημ^3x-συν^3x}{ημx-συνx}=\frac{\cancel{(ημx-συνx)}(ημ^2x+ημxσυνx+συν^2x)}{\cancel{ημx-συνx}}=$$

$$=ημ^2x+ημx\cdot συνx+συν^2x=$$

$$=1+ημx\cdot συνx$$

Δ2.

- $ημ(π+x)=-ημx$
- $συν\left(\dfrac{π}{2}+x\right)=-ημx$
- $συν(2π+x)=συνx$
- $ημ\left(\dfrac{π}{2}+x\right)=συνx$
- $ημ(-x)=-ημx$
- $συν(-x)=συνx$

Άρα η αποδεικτέα σχέση γίνεται:

$$-ημx(-ημx)+συνx(συνx)+ημx\cdot συνx=+ημ^2x+συν^2x+ημx\cdot συνx=1+ημx\cdot συνx$$

Δ3. Έστω ότι ισχύει $1+ημx\cdot συνx>0$. Τότε:

$$2(1+ημx\cdot συνx)>2\cdot 0 \Leftrightarrow 2+2ημx\cdot συνx>0 \Leftrightarrow 1+1+2ημxσυνx>0$$

$$\Leftrightarrow 1+ημ^2x+συν^2x+2ημx\cdot συνx>0 \Leftrightarrow 1+(ημx+συνx)^2>0 \quad \text{που ισχύει}$$