ΚΥΡΙΑΚΗ 6 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 43

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 41

Α3. Σ – Λ – Σ – Λ – Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα συνεπώς:

$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$

Β2. $\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{u}|^2=|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|^2=\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2=4+12+9=25 \Rightarrow |\vec{u}|=5$

Β3. $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{v}|^2=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=1+2+1=4 \Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{4}=2$

Β4. Για να βρούμε τη γωνία των δύο διανυσμάτων έχουμε, από τον τύπο του εσωτερικού γινομένου: $\text{συν}(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{10}{2\cdot 5}=1$

διότι $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=2\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=2+2+3+3=10$

οπότε η γωνία των δύο διανυσμάτων είναι μηδενική.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι συντεταγμένες του μέσου Ε είναι: $E\left(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{4+0}{2}\right)=(3,2)$.

Γ2. $\lambda_{BE}=\dfrac{2+1}{3-1}=\dfrac{3}{2}$ συνεπώς η εξίσωση της ευθείας είναι: $y+1=\dfrac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2}$

Γ3. $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{0+1}{4-1}=\dfrac{1}{3}$ οπότε: $\lambda_{B\Gamma}\cdot\lambda_{A\Delta}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}=-3$

Έτσι η εξίσωση του ύψους ΑΔ είναι : $y-4=-3(x-2) \Leftrightarrow y=-3x+10$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να είναι η (1) εξίσωση ευθείας θα πρέπει οι συντελεστές των x και y να μην είναι συγχρόνως 0. Παρατηρούμε ότι το $\alpha^2+\alpha+1$ έχει Δ<0 συνεπώς ισχύει $\alpha^2+\alpha+1>0$ για κάθε $\alpha\in R$. Άρα για οποιαδήποτε τιμή του α η (1) είναι εξίσωση ευθείας.

Δ2. Δίνουμε δύο τιμές στο α και παίρνουμε δύο ευθείες της οικογένειας των ευθειών της σχέσης (1).

Για α=0 έχουμε: $y=-2$

Για α=1 έχουμε: $3x-3y-3=0 \Leftrightarrow x-y-1=0$. Άρα $x=-1$. Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι: $A(-1,-2)$.

Εξετάζουμε αν το σημείο τομής των δύο ευθειών ικανοποιεί και την γενική εξίσωση (1).

Πράγματι: $(\alpha^2+2\alpha)(-1)-(\alpha^2+\alpha+1)(-2)-\alpha^2-2=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0=0$

Άρα όλες οι ευθείες διέρχονται από το $A(-1,-2)$.

Δ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (η) είναι $\lambda_\eta=1$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της (1) είναι: $\lambda_\varepsilon=\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}$. Ισχύει:

$$\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\eta=-1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}\cdot 1=-1 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha=-\alpha^2-\alpha-1 \Leftrightarrow 2\alpha^2+3\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=-1 \text{ ή } \alpha=-\frac{1}{2}$$

Άρα η ευθεία που προκύπτει και για τις δύο τιμές του α είναι η: $x+y+3=0$

Διότι: για $\alpha=-1$ έχουμε: $(1-2)x-(1-1+1)y-3=0 \Leftrightarrow -x-y-3=0 \Leftrightarrow x+y+3=0$

Και για $\alpha=-\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$\left(\frac{1}{4}+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)x-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)y-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}y-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow x+y+3=0$$