ΚΥΡΙΑΚΗ 6 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

α) Σχολικό βιβλίο σελ. 69

β) Σχολικό βιβλίο σελ. 71

γ) **i)** Σ **ii)** Σ **iii)** Σ **iv)** Λ **v)** Λ

δ) $1 \to \beta,\ \ 2 \to \delta,\ \ 3 \to \alpha,\ \ 4 \to \gamma$

ΘΕΜΑ Β

α) Είναι:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} + \frac{1\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{4}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

β) Η εξίσωση γράφεται:

$$|x+\mathrm{A}| = 3 \Leftrightarrow |x+2| = 3 \Leftrightarrow \left(x+2=-3 \ \text{ ή } \ x+2=3\right) \Leftrightarrow \left(x=-5 \ \text{ ή } \ x=1\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

α) Είναι: $|2x-5| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Leftrightarrow -3+5 < 2x-5+5 < 3+5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 < 2x < 8 \Leftrightarrow 1 < x < 4$$

Ομοίως: $|y-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-2 < 1 \Leftrightarrow -1+2 < y-2+2 < 1+2 \Leftrightarrow 1 < y < 3$

β) Είναι: $1 < x < 4 \Leftrightarrow \left(1 < x \ \ \text{και} \ \ x < 4\right) \Leftrightarrow \left(0 < x-1 \ \ \text{και} \ \ x < 4\right)$

Άρα $|x-1| = x-1$

Ισχύει ακόμη ότι: $1 < y < 3 \Leftrightarrow (1 < y \quad \text{και} \quad y < 3) \Leftrightarrow (1 < y \quad \text{και} \quad y-3 < 0)$

Άρα $|y-3| = -(y-3) = 3-y$

Τότε: $\mathrm{A} = |x-1| + |y-3| = x-1+3-y = x-y+2$

γ) Είναι: $1 < x < 4 \ (1)$ και $1 < y < 3 \Leftrightarrow -1 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -1 \ (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$1-3 < x-y < 4-1 \Leftrightarrow -2 < x-y < 3 \Leftrightarrow -2+2 < x-y+2 < 3+2 \Leftrightarrow 0 < x-y+2 < 5$

ΘΕΜΑ Δ

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x - (\lambda^2+5)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = -(\lambda^2+5)$ και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot\left[-(\lambda^2+5)\right] = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$

β) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε: $5\lambda^2 \geq 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 + 20 \geq 20 > 0$, οπότε $\Delta > 0$ και συνεπώς η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2+5) = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Είναι: $(x_1-2)(x_2-2) = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 8 = 0$ (1)

Από τους τύπους Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = S = \dfrac{-\beta}{\alpha} = \lambda$ και $x_1x_2 = P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = -(\lambda^2+5)$

Η (1) γίνεται: $-(\lambda^2+5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$ και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ \dfrac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$