

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ

ΘΕΜΑ Α

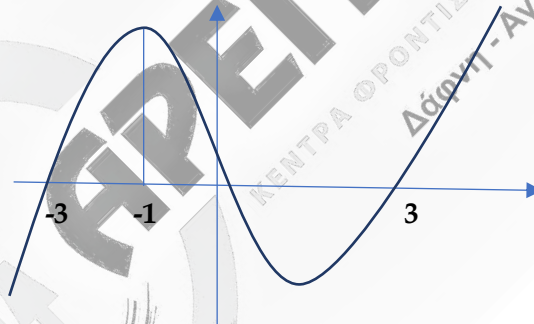
A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 4

A3.



Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f . Από τη γραφική παράσταση της f :

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f και να εξετάσετε αν αντιστρέφεται αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν, αιτιολογώντας τα αποτελέσματά σας:

(i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$

Μονάδες 5 (3+2)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο απαντήσεων, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, το γράμμα «Σ», αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα «Λ», αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

β) Κάθε μη συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ είναι και μη παραγωγίσιμη στο

διάστημα αυτό.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει ότι: $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}$.

δ) Αν $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει ότι: $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

ε) Ισχύει ότι $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x / \eta\mu x = 0\}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 - 7x + 4} - \alpha x, & x \geq 0 \\ \frac{\eta\mu\alpha x}{x}, & x < 0 \end{cases}$, με $\alpha \neq 0$.

B1. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 5

Για $\alpha = 2$:

B2. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

B3. α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση: (ε) $2y + 3x - 1 = 0$.

Μονάδες 6

β) Να δείξετε ότι η (ε) έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot e^x - (x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_1 \in (0, 2)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι και το $-x_1$ είναι ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-x_1, x_1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x' .

Μονάδες 7

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (-x_1, x_1)$, διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} g(1+h) = 1$
- $f^2(x) - 2f(x)g(x) = 2x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - g(x)| + x^3 g(x) - f(x)}{x - 1}$.

Μονάδες 6

Αν δίνεται ότι $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$:

Δ3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\ln(f(x))}{x-1} + \frac{\sin x}{x} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Μονάδες 7

Σας ευχόμαστε επιτυχία!!!