ΚΥΡΙΑΚΗ 9 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 106

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 128

Α3. (α) $A_f = R,\ f(A) = R$

Η f δεν αντιστρέφεται διότι δεν είναι 1-1.

Παρατηρούμε ότι $f(-3) = f(3) = 0$.

(β) (i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = f'(-1) = 0$

(ii) Το όριο δεν υπάρχει διότι: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{f(x)} = -\infty \end{cases}$

Α4. Λ – Σ – Λ – Λ – Λ

Θέμα Β

Β1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-\alpha x\right) = 2 = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\alpha\cdot\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x}\right) \overset{(\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \alpha x=u)}{=} \lim_{u\to 0}\left(\frac{\alpha\cdot\eta\mu u}{u}\right) = \alpha$$

Συνεπώς α=2.

Β2. (i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2-7x+4}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-7x+4}+2x\right)} =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-7x+4-4x^2}{x\left(\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-7+\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}}+2\right)}=-\frac{7}{4}$$

(ii) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x}=0$ διότι: $\left|\frac{\eta\mu 2x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\frac{1}{|x|}$, $\mu\varepsilon$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$.

Άρα από κριτήριο παρεμβολής: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x}=0$.

Β3. (α) Είναι $f(1)=-1,\ f'(1)=-\frac{3}{2}$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+1=-\frac{3}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2y+3x-1=0.$$

(β) $f(x)=y\Leftrightarrow\frac{\eta\mu 2x}{x}=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu 2x}{x}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x)=\frac{\eta\mu 2x}{x}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$, με $x\in\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ και εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano.

- Η h είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων στο $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$

  $h(0)=2>0\quad(\text{Η } h \textit{ συνεχής στο } 0)$
- $h\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}<0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ τέτοιο ώστε: $h(x_0)=0$.

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\cdot e^x-(x+1),\quad x\in R$

- είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων στο $[0,2]$.
- $f(0)=-2<0,\ f(2)=e^2-3>0$. Άρα $f(0)\cdot f(2)<0$

Συνεπώς από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f(x_1)=0$.

Γ2. Υπολογίζουμε το $f(-x_1)$:

$$f(-x_1)=(-x_1-1)\cdot e^{-x_1}-(-x_1+1)=\frac{-x_1-1}{e^{x_1}}-(-x_1+1)=\frac{-(x_1+1)+(x_1-1)e^{x_1}}{e^{x_1}}=\frac{f(x_1)}{e^{x_1}}=0$$

Άρα και το $-x_1$ είναι ρίζα της f.

Γ3. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle στο $\left[-x_1,x_1\right]$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[-x_1,x_1\right]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-x_1,x_1\right)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- $f(x_1)=f(-x_1)=0$

Άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-x_1,x_1)\subseteq(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0)=0$, δηλαδή η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση f στα διαστήματα $\left[-x_1,0\right]$, $\left[0,x_1\right]$

- Η f συνεχής στα $\left[-x_1,0\right],\left[0,x_1\right]$
- Η f παραγωγίσιμη στα $\left(-x_1,0\right),\left(0,x_1\right)$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in\left(-x_1,0\right): f'\left(\xi_1\right)=\dfrac{f(0)-f(-x_1)}{x_1}=\dfrac{-2}{x_1}$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in\left(0,x_1\right): f'\left(\xi_2\right)=\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1}=\dfrac{2}{x_1}$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε:

$$f^2(x)-2f(x)g(x)=2x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)=g^2(x)+2x^2+1\Leftrightarrow$$
$$\left(f(x)-g(x)\right)^2=g^2(x)+2x^2+1$$

Έστω $h(x)=f(x)-g(x)$ οπότε η προηγούμενη ισότητα γράφεται: $\left(h(x)\right)^2=g^2(x)+2x^2+1$.

Αν $h(x)=0\Leftrightarrow h^2(x)=0\Leftrightarrow g^2(x)+2x^2+1=0$ Άτοπο.

Συνεπώς $h(x)\neq 0$ και η h συνεχής ως διαφορά συνεχών στο R, οπότε η h διατηρεί πρόσημο στο R.

Άρα, $h(x)=\sqrt{g^2(x)+2x^2+1}$ για κάθε $x\in R$ ή $h(x)=-\sqrt{g^2(x)+2x^2+1}$ για κάθε $x\in R$.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{h\to 0} g(1+h)=1, \quad \theta έτουμε\ 1+h=x \Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x)=1=g(1),\ \delta ιότι\ g\ \sigma υνεχής.$$

Για x=1 έχουμε:

$$f^2(1)-2f(1)g(1)=2\cdot 1^2+1 \Leftrightarrow f^2(1)-2f(1)-3=0 \Leftrightarrow f(1)=-1\ \ ή\ \ f(1)=3$$

Όμως $f(x)>0$, άρα $f(1)=3$. Οπότε

$$h(1)=f(1)-g(1)=3-1=2>0 \Rightarrow h(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)>0$$

Δ2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)-g(x)|+x^3g(x)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)+x^3g(x)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-g(x)+x^3g(x)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3g(x)-g(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)\left(x^3-1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=3g(1)=3$$

Δ3. Γνωρίζουμε ότι:

$$h(x)=\sqrt{g^2(x)+2x^2+1} \Leftrightarrow f(x)-g(x)=\sqrt{g^2(x)+2x^2+1} \Leftrightarrow f(x)-x^2=\sqrt{x^4+2x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$f(x)=x^2+\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+x^2+1=2x^2+1$$

Δ4. Η εξίσωση γράφεται: $\dfrac{\ell n(f(x))}{x-1}+\dfrac{\sigma υν x}{x}=0 \Leftrightarrow x\ell n(f(x))+(x-1)\sigma υν x=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=x\ell n(f(x))+(x-1)\sigma υν x$ στο $[0,1]$

- Η φ συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $x\ell n(f(x))\ \kappa αι\ (x-1)\sigma υν x$ που είναι συνεχείς ως γινόμενα συνεχών και σύνθετων συναρτήσεων.
- $\varphi(0)=0\ell n(f(0))+(0-1)\sigma υν 0=-1<0$, $\varphi(1)=1\ell n(f(1))+(1-1)\sigma υν 1=\ell n 3>0$
  Οπότε: $\varphi(0)\varphi(1)<0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $\varphi(x_0)=0$.