# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
## 5 ΜΑΪΟΥ 2021

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 133

**Α2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 128

**Α3. α)** Ψ **β)** Σχολικό βιβλίο σελ. 99

**Α4. α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** • $D_{f+g} = D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g = (0,+\infty)$.

• $D_{f\circ g} = \left\{ x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f \right\} = \left\{ x\in\mathbb{R} \,/\, x\cdot e^x > 0 \right\} = \left\{ x\in\mathbb{R} \,/\, x>0 \right\} = (0,+\infty)$.

• $D_{g\circ f} = \left\{ x\in D_f \,/\, f(x)\in D_g \right\} = \left\{ x>0 \,/\, (x+\ell nx)\in\mathbb{R} \right\} = (0,+\infty)$.

• $(f\circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(x\cdot e^x\right) = x\cdot e^x + \ell n\left(x\cdot e^x\right) = x\cdot e^x + \ell nx + \ell ne^x =$
$x\cdot e^x + \ell nx + x = x + \ell nx + x\cdot e^x = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

• $(g\circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(x+\ell nx\right) = (x+\ell nx)\cdot e^{x+\ell nx} = (x+\ell nx)\cdot e^x\cdot e^{\ell nx} =$
$(x+\ell nx)\cdot e^x\cdot x = x\cdot e^x\cdot(x+\ell nx) = g(x)\cdot f(x) = (g\cdot f)(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

**Β2.** Η $f$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = 1+\dfrac{1}{x} > 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η $f$ είναι γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$, επομένως είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών της $f$.
$f\left((0,+\infty)\right) \underset{\nearrow}{\overset{συν.}{=}} \left( \lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \right) = \ldots = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$ είναι το $\mathbb{R}$.
Το σύνολο τιμών της $f^{-1}$ είναι το πεδίο ορισμού της $f$, επομένως είναι το $(0,+\infty)$.

**Β3.** Από το Β2. Έχουμε ότι η εξίσωση έχει νόημα για $x\in(0,+\infty)$.
$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x+\ell nx = x \Leftrightarrow \ell nx = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

**Β4.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(g\circ f)(x) - x^2\cdot e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\cdot e^x\cdot(x+\ell nx) - x^2\cdot e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2\cdot e^x + x\cdot e^x\cdot\ell nx - x^2\cdot e^x}{e^x} =$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot e^x\cdot \ell nx}{e^x} = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ell nx\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell nx}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Αφού η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, με $f'(x)=3x^2+2\lambda^2 x-\lambda-3$ και παρουσιάζει ακρότατα στα εσωτερικά σημεία $x_1=-1$ και $x_2=1$, από το Θ. Fermat έχουμε:

$$f'(-1)=0 \Leftrightarrow -2\lambda^2-\lambda=0 \Leftrightarrow -\lambda(2\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow 2\lambda^2-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(2\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=\frac{1}{2}.$$

Άρα $\lambda=0$.

Είναι $f(x)=x^3-3x$ και $f'(x)=3x^2-3$, $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 3x^2-3\ge 0 \Leftrightarrow x^2\ge 1 \Leftrightarrow |x|\ge 1 \Leftrightarrow x\le -1$ ή $x\ge 1$.

Τα πρόσημα της $f'$ και η μονοτονία της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Επομένως η $f$ παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο $x_1=-1$ και τοπ. ελάχιστο στο $x_2=1$.

**Γ2.** $f(x)=x^3-3x$, $x\in\mathbb{R}$.

Η $f$ είναι πολυωνυμική, οπότε είναι συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\alpha+1)$.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}=f(\alpha+1)-f(\alpha).$$

Οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει κλίση $f'(\xi)=f(\alpha+1)-f(\alpha)$.

Επίσης η κλίση της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}=f(\alpha+1)-f(\alpha)$.

Επομένως $f'(\xi)=\lambda_{AB}$.

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΒ.

**Γ3.** $D_f=\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in D_f$ ισχύει $-x\in D_f$. Επίσης

$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η $f$ είναι περιττή.

$$\frac{f(\eta\mu x)+x}{x+2}-\frac{f(\eta\mu x)-x+4}{x-2}=0 \Leftrightarrow (x-2)\big(f(\eta\mu x)+x\big)-(x+2)\big(f(\eta\mu x)-x+4\big)=0$$

Θέτουμε $g(x)=(x-2)\big(f(\eta\mu x)+x\big)-(x+2)\big(f(\eta\mu x)-x+4\big)$, $x\in[-2,2]$.

Η $g$ είναι συνεχής στο $[-2,2]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$g(-2)=-4\big(f(\eta\mu(-2))-2\big)=-4\big(f(-\eta\mu 2)-2\big)\overset{f:\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=}-4\big(-f(\eta\mu 2)-2\big)=4\big(f(\eta\mu 2)+2\big)$$

$$g(2)=-4\big(f(\eta\mu 2)+2\big).$$

Οπότε $g(2)\cdot g(-2)=-16\big(f(\eta\mu 2)+2\big)^2<0$, γιατί $2\ne\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow \eta\mu 2<1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\eta\mu 2)>f(1)=-2$.

Από το Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-2,2)$.

Αριστοτέλειο
Δάφνη - Αγ. Δημήτριος

**Γ4.** Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο Μ είναι ίση με $f'(x)$.
Οπότε θα βρούμε το ελάχιστο της $f'$.
Η $f'$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f''(x)=6x$.
Τα πρόσημα της $f''$ και η μονοτονία της $f'$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Επομένως η $f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$.
Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathrm{M}(0,0)$.

## <u>ΘΕΜΑ Δ</u>

**Δ1.** Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x-1}-1}$ (1) για $x$ κοντά στο 1. Είναι $\lim\limits_{x\to1}h(x)=2$.
(1) $\Leftrightarrow f(x)=h(x)\left(e^{x-1}-1\right)$.
Η $f$ είναι συνεχής στο 1 ως παρ/μη, οπότε $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(h(x)\left(e^{x-1}-1\right)\right)=2\cdot0=0$.

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to1}\frac{h(x)\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}h(x)\cdot\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=2\cdot1=2,$$ γιατί

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}}{1}=1.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $\mathrm{A}\left(1,f(1)\right)$ είναι:
$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=2x-2$.

**Δ2.** Η $g$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $g'(x)=f'(x)+(x-1)\cdot f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, γιατί
$f'(x)>(1-x)\cdot f''(x)\Leftrightarrow f'(x)-(1-x)\cdot f''(x)>0\Leftrightarrow f'(x)+(x-1)\cdot f''(x)>0$.
Άρα η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Είναι $g(1)=(1-1)\cdot f'(1)=0$.

Για $x<1\overset{g:\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(1)\Leftrightarrow g(x)<0$.

Για $x>1\overset{g:\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(1)\Leftrightarrow g(x)>0$.

Για $x<1$: $g(x)<0\Leftrightarrow(x-1)\cdot f'(x)<0\overset{(x-1<0)}{\Leftrightarrow}f'(x)>0$.

Για $x>1$: $g(x)>0\Leftrightarrow(x-1)\cdot f'(x)>0\overset{(x-1>0)}{\Leftrightarrow}f'(x)>0$.
Επίσης $f'(1)=2>0$.
Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**Δ3.** Για $x<1\overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$.

Για $x>1\overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$.
Επίσης $f(x)\cdot f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, οπότε οι τιμές της $f''$ είναι ομόσημες με τις τιμές της $f$.
Τα πρόσημα της $f''$ και η κυρτότητα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | | $\smile$ |

Επίσης η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $\left(1, f(1)\right)$. Άρα η $f$ είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$, κυρτή στο $[1, +\infty)$ και το σημείο $\left(1, f(1)\right) = (1, 0)$ είναι σημείο καμπής της $C_f$.

**Δ4.** $f(\mathbb{R}) \underset{\uparrow}{\overset{συν.}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$, γιατί:

Η $f$ είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$, οπότε η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της $C_f$ είναι πάνω από τη από τη $C_f$. Από το Δ1. έχουμε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ στο $\left(1, f(1)\right)$ είναι η $y = 2x - 2$.

Επομένως ισχύει $f(x) \le 2x - 2$ για κάθε $x \in (-\infty, 1]$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Η $f$ είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$, οπότε η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της $C_f$ είναι κάτω από τη από τη $C_f$. Από το Δ1. έχουμε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ στο $\left(1, f(1)\right)$ είναι η $y = 2x - 2$.

Επομένως ισχύει $f(x) \ge 2x - 2$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Δάφνη - Άγ. Δημήτριος