ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
21/03/2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Γ $\rightarrow$ Από την αρχή διατήρησης της ύλης : $\Pi_B = \frac{\Delta V_{\delta o\chi}}{\Delta t} + \Pi_1 + \Pi_2$.

Α2. Α $\rightarrow$ Συνθήκη ισορροπίας για το έμβολο : $F_{\upsilon\gamma\rho o\upsilon} = F_{atm} + F$, μετά νόμος υδροστατικής πίεσης.

Α3 .Α $\rightarrow$ Αρχή επαλληλίας $u_A = u_{\mu\varepsilon\tau} + u_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau} = \omega \cdot r + \omega \cdot R$.

Α4. Γ $\rightarrow$Για την στροφική κίνηση του κυλίνδρου η οποία γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ως προς τον άξονα συμμετρίας του :
$\Sigma\tau = 0 \Leftrightarrow F \cdot L - w \cdot R = 0 \Leftrightarrow 25 \cdot L = 100 \cdot R$.

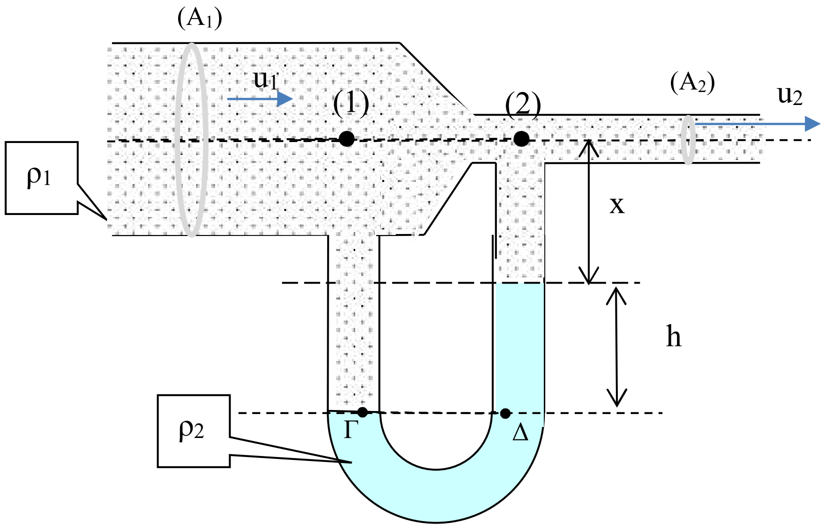
Α5. 1.Σ 2.Λ 3.Σ 4.Σ 5.Λ

ΘΕΜΑ Β

Β2. Ι. Σωστή η α)
Επειδή το έμβολο εμβαδού A_1 κινείται με σταθερή ταχύτητα δέχεται ολική δύναμη ίση με το μηδέν.
α) Ισορροπία εμβόλου:
Η δύναμη από την ατμόσφαιρα και η δύναμη F είναι αθροιστικά αντίθετες από την δύναμη που ασκεί το υγρό στην περιοχή (1) ακριβώς πίσω από το έμβολο εμβαδού A_1.
$\Sigma F = 0 \rightarrow F_{atm} + F = F_{\upsilon\gamma\rho o\upsilon} \rightarrow p_1 = p_{atm} + \frac{F}{A_1}$ (1)
β) Εξίσωση συνέχειας στις περιοχές (1) ,(2) όπου (2) η περιοχή στο στόμιο εκροής:
$A_1 \cdot u_1 = A_2 \cdot u_2$.
Από αυτή προκύπτει : $u_2 = 3 \cdot u_1$ (2).
γ) Εξίσωση Bernoulli στα σημεία (1) ,(2) που ανήκουν στην ίδια οριζόντια ρευματική γραμμή.
Το σημείο (2) βρίσκεται στην περιοχή εκροής του υγρού.
$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2$.Από τις σχέσεις (1) και (2) η τελευταία γράφεται:
$$p_{atm} + \frac{F}{A_1} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho \cdot 9u_1^2 \rightarrow F = 4\rho A_1 \cdot u_1^2$$
ΙΙ. Σωστή η γ)
Ο όγκος του υγρού $A_1 \cdot h$ που εξέρχεται είναι ίσος με τον όγκο του υγρού που εισέρχεται στο δοχείο $A_3 \cdot h'$ και επειδή $A_3 = 2A_1$ προκύπτει h'=h/2 όπου h' το ύψος του υγρού στο δοχείο.
Από την εκφώνηση η οπή απέχει απόσταση h'/2=h/4 από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στο δοχείο οπότε από θεώρημα Torricelli έχουμε $u_3=\sqrt{2g \cdot \frac{h}{4}} \rightarrow u_3 = \sqrt{g \cdot \frac{h}{2}}$
Η παραπάνω σχέση προκύπτει εφαρμόζοντας εξίσωση Bernoulli για δυο σημεία

ρευματικής γραμμής , το Ε που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και του Ζ που βρίσκεται στο μέτωπο της εξερχόμενης φλέβας στην οπή (3).

Β2. Σωστή η α)



<u>Βήμα 1ο</u>

Εξίσωση συνέχειας στις περιοχές των σημείων 1,2:

$\Pi_1 = \Pi_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot u_1 = A_2 \cdot u_2 \Leftrightarrow 5A_2 \cdot u_1 = A_2 \cdot u_2 \Leftrightarrow u_2 = 5u_1$ (1)

<u>Βήμα 2ο</u>

Εξίσωση Bernoulli στα σημεία 1,2:

$$\Leftrightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 \cdot u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_1 \cdot u_2^2 \Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho_1 \cdot 25u_1^2 - \frac{1}{2}\rho_1 \cdot u_1^2 = 12\rho_1 \cdot u_1^2 \Leftrightarrow$$

$p_1 - p_2 = 12\rho_1 \cdot u_1^2 (2)$

με την χρήση της (1) στην τελευταία πράξη.

<u>Βήμα 3ο</u>

Επιλέγουμε δυο σημεία Γ,Δ του σωληνα **U** που ανήκουν στο ίδιο υγρό πυκνότητας ρ_2 και βρίσκονται στο ίδιο ύψος, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τα σημεία αυτά έχουν την ίδια πίεση. Από τον νόμο της υδροστατικής πίεσης:

$p_\Gamma = p_1 + \rho_1 \cdot g \cdot (x+h)$ (3) και

$p_\Delta = p_2 + \rho_1 \cdot g \cdot x + \rho_2 \cdot g \cdot h$ (4)

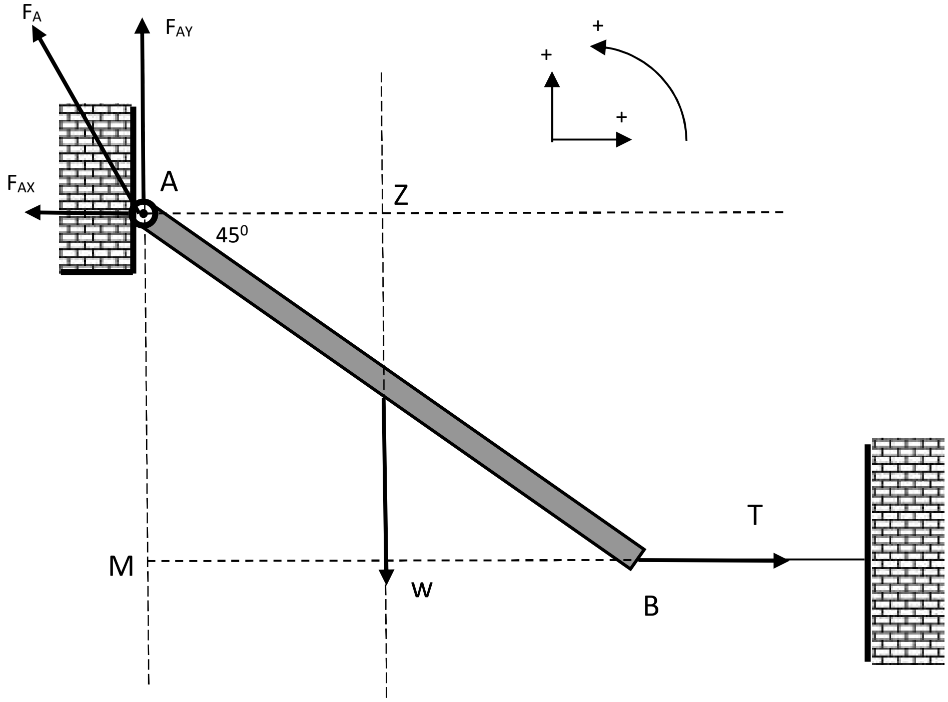
Από τις (3),(4) προκύπτει :

$p_1 - p_2 = \rho_2 \cdot g \cdot h - \rho_1 \cdot g \cdot h = (\rho_2 - \rho_1) \cdot g \cdot h = (13\rho_1 - \rho_1) \cdot g \cdot h = 12\rho_1 \cdot g \cdot h$ (5)

Από τις (2),(5) και επειδή τα πρώτα μέλη είναι ίσα ισχύει :

$12\rho_1 \cdot u_1^2 = 12\rho_1 \cdot g \cdot h \Leftrightarrow u_1 = \sqrt{gh} \Leftrightarrow \boxed{u_1 = \sqrt{gh}}$.

Β3. Σωστή η γ)



Έστω L το μήκος της ράβδου.

Ισορροπία ράβδου:

$\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow T - F_{AX} = 0 \Leftrightarrow F_{AX} = T$ (1)

$\rightarrow \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F_{AY} - w = 0 \Leftrightarrow F_{AY} = w$ (2)

$\rightarrow \Sigma \tau = 0$ ως προς το σημείο Α:

$$\tau_{F_A} + \tau_w + \tau_{\mathrm{T}} = 0 \Leftrightarrow 0 - w \cdot (AZ) + T \cdot (\mathrm{AM}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$T \cdot L \cdot \eta\mu 45^0 = w \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^0 \Leftrightarrow T = \frac{w}{2} (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και(3) προκύπτει ότι : $F_{AX} = \dfrac{w}{2}$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι:

γ) $F_A = \sqrt{F_{AX}^2 + F_{AY}^2} = \sqrt{(\dfrac{w}{2})^2 + w^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} w$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από εκφώνηση: Όση βαρυτική δυναμική ενέργεια προσφέρει σε μια ποσότητα υγρού dm η αντλία για να την ανυψώσει κατά Η ,τόση κινητική ενέργεια της προσδίδει όταν εξέρχεται από τον σωλήνα της:

$$dm\cdot g\mathrm{H}=\frac{1}{2}dm\cdot u^2 \Leftrightarrow H=\frac{u^2}{2g}\Leftrightarrow H=5m$$

Γ2. Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την ποσότητα υγρού dm κατά την κίνηση της από την ηρεμία σε ύψος Η ,στο οποίο εκτοξεύεται από τον σωλήνα της αντλίας με ταχύτητα u.

$$W_{\mathrm{ΑΝΤΛΙΑΣ}}+W_B=K_{ΤΕΛ}-K_{\mathrm{ΑΡΧ}}\Leftrightarrow W_{\mathrm{ΑΝΤΛΙΑΣ}}-dm\cdot g\mathrm{H}=\frac{1}{2}dm\cdot u^2-0\Leftrightarrow$$

$$W_{\mathrm{ΑΝΤΛΙΑΣ}}=dm\cdot g\mathrm{H}+\frac{1}{2}dm\cdot u^2 (1)$$

Από τον ρυθμό μεταβολής της σχέσης (1) προκύπτει στο πρώτο μέλος η ισχύς τη αντλίας: $\frac{dW_{\mathrm{A}}}{dt}=\frac{dm}{dt}\cdot g\mathrm{H}+\frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\cdot u^2\Leftrightarrow P_A=\frac{dm}{dt}\cdot g\mathrm{H}+\frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\cdot u^2\ (2)$

Από το ορισμό της παροχής : $\Pi=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{1}{\rho}\frac{dm}{dt}\Leftrightarrow\frac{dm}{dt}=\Pi\cdot\rho=A_\sigma\cdot u\cdot\rho\ (3)$

Με αντικατάσταση της σχέσης (3) στη (2) :

$$P_A=\frac{1}{2}(A_\sigma\cdot u\cdot\rho)\cdot u^2+(A_\sigma\cdot u\cdot\rho)\cdot g\cdot H=1500+1500=3000\frac{J}{s}$$

Γ3. Επειδή η αντλία λειτουργεί για Δt=100s ο όγκος του νερού που βάζει στην δεξαμενή είναι ΔV οπότε : $\Pi=\frac{\Delta V}{\Delta t}\Leftrightarrow\Delta V=\Pi\cdot\Delta t\Leftrightarrow A_B\cdot h=\Pi\cdot\Delta t\Leftrightarrow h=\frac{\Pi\cdot\Delta t}{A_B}\Leftrightarrow h=4m$

Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernoulli για δυο σημεία ρευματικής γραμμής, το Ε που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και του Ζ που βρίσκεται στο μέτωπο της εξερχόμενης φλέβας στην οπή (1). Η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι ίση με το μηδέν στη βάση του δοχείου και θα βρούμε την ταχύτητα εκροής στην οπή.

$p_{atm}+\rho gh+\frac{1}{2}\rho u_E^2=p_{atm}+\rho g(h-y_1)+\frac{1}{2}\rho u_Z^2$ και επειδή $u_E=0$ προκύπτει $u_Z=\sqrt{2gy_1}=4m/s$

Το ύψος από το έδαφος στο οποίο έχει ανοιχθεί η οπή είναι $h-y_1=3,2m$.

Ο χρόνος πτώσης της φλέβας: : $\mathrm{t}_\Pi=\sqrt{\frac{2(h-y_1)}{g}}=0,8s$

Το βεληνεκές της φλέβας : $\mathrm{S}_1=\mathrm{u}_Z\cdot\mathrm{t}_\Pi=3,2m$

Γ4. Πρέπει να ανοιχθεί καινούρια οπή σε άλλο ύψος d, άρα έχουμε διαφορετική ταχύτητα εκροής u_2, διαφορετικό χρόνο πτώσης $t_{\Pi 2}$, όμως ίδιο βεληνεκές S_2, άρα με εξίσωση Bernoulli από την επιφάνεια στην καινούρια οπή:

$$p_{atm}+\rho g d+\frac{1}{2}\rho u_E^2=p_{atm}+\rho g(h-d)+\frac{1}{2}\rho u_2^2 \Leftrightarrow u_2=\sqrt{2g(h-d)}$$

Ο χρόνος πτώσης από ύψος d είναι : $t_\Pi=\sqrt{\frac{2d}{g}}$

Έχουμε διαδοχικά :

$$S_1=S_2 \Leftrightarrow S_1=\sqrt{2g(h-d)}\cdot\sqrt{\frac{2d}{g}} \Leftrightarrow S_1^2=4(h-d)\cdot d \Leftrightarrow 4d^2-4hd+S_1^2=0 \Leftrightarrow$$

$$d^2-4d+2,56=0$$

Το παραπάνω τριώνυμο έχει Δ=5,76 με $\sqrt{\Delta}=2,4$ και δίνει δεκτή λύση την $d=0,8m$

Γ5. Για να παραμένει η στάθμη του υγρού στο δοχείο σταθερή πρέπει η παροχή της οπής (3) να έχει γίνει τελικά ίση με την παροχή της βρύσης. Έστω u_3 η τελική ταχύτητα εκροής από την οπή (3).

$$\Pi_{BP}=\Pi_3 \Leftrightarrow \Pi_{BP}=A_3\cdot u_3 \Leftrightarrow 2\cdot 10^{-4}=10^{-4}\cdot u_3 \Leftrightarrow u_3=2m/s$$

Ονομάζουμε h_3 την απόσταση της οπής (3) από την σταθεροποιημένη ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.Εφαρμόζουμε εξίσωση Bernoulli από την επιφάνεια στην οπή (3), με βαρυτική δυναμική ενέργεια ίση με το μηδέν στο επιπεδο της οπής :

$$p_{atm}+\rho g h_3+0=p_{atm}+0+\frac{1}{2}\rho u_3^2 \Leftrightarrow h_3=\frac{u_3^2}{2g} \Leftrightarrow h_3=0,2m$$

Το νερό που θα εξέλθει από την οπή (3) θα αφορά ύψος h_3 και θα έχει όγκο $V=A_B\cdot h_3=0,1m^3$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Οι δυνάμεις που δεχεται η ράβδος είναι η τάση Τ του νήματος στο άκρο Γ το βάρος της Mg στο μέσο της , η δύναμη Ν στήριξης στο σημείο Δ και μια δύναμη ίση με το βάρος του δίσκου F'=mg στο άκρο Α με φορά προς τα κάτω αντίθετη της δύναμης F που ασκεί η ράβδος στον δίσκο.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει Στ=0 ως προς το σημείο Γ.

$$\tau_{mg}+\tau_{Mg}+\tau_T+\tau_N=0 \Leftrightarrow mg\cdot L+Mg\cdot\frac{L}{2}+0-N\cdot(L-d)=0 \Leftrightarrow$$

$$N=\frac{mg\cdot L+Mg\cdot L/2}{L-d}$$

Με αντικατάσταση : $N=80\text{N}$

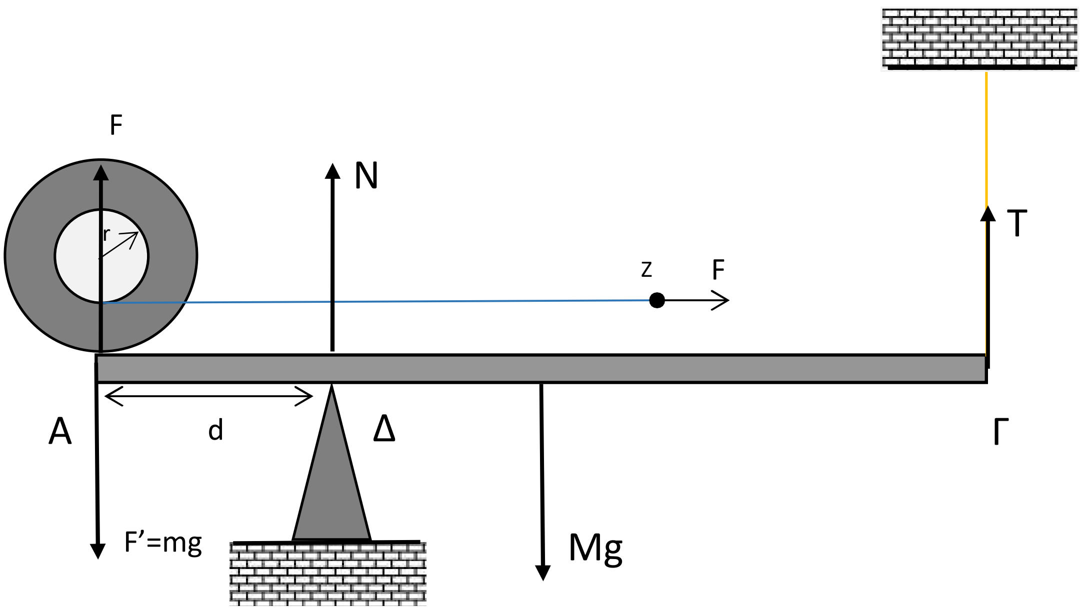
Δ2. Μεταξύ ράβδου και δίσκου ασκείται οριζόντια δύναμη στατικής τριβής. Το στήριγμα Δ εξασφαλίζει την σταθερή οριζόντια θέση της ράβδου όσο ο δίσκος κυλιέται πάνω σε αυτή. Αυτό δηλώνει ότι το νήμα παραμένει συνεχώς οριζοντιο Ονομάζουμε u_{cm1} την ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου όταν αυτός έχει μετατοπιστεί οριζόντια κατά x_1. Από τους τύπους της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης του κέντρου μάζας έχουμε:

$x_1 = \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t_1^2 \Leftrightarrow t_1 = 3s$ οπότε: $u_{cm1} = a_{cm} \cdot t_1 = 2 \cdot 3 = 6m/s$

Το σημείο αυτό (έστω Σ) της κατακόρυφης διαμέτρου απέχει από το έδαφος απόσταση $d = R + r$ οπότε και η απόστασή του από το κέντρο του δίσκου είναι r.

Αρχή επαλληλίας:

$$u_\Sigma = u_{\mu\varepsilon\tau(\Sigma)} + u_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau(\Sigma)} = \omega \cdot R + \omega \cdot r = \omega \cdot R + \omega \cdot \frac{R}{2} = u_{cm(1)} + \frac{u_{cm(1)}}{2} = 9m/s \Leftrightarrow \quad u_\Sigma = 9m/s$$



Δ3. Όταν το κατώτερο σημείο του δίσκου φτάνει στο άκρο Γ της ράβδου το κέντρο μάζας του έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x_{cm} = L = 16m = \frac{1}{2} a_{cm} \Delta t^2$ με επιτάχυνση $a_{cm} = 2m/s^2$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt το σημείο Ζ έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x_Z = \frac{1}{2} a_Z \Delta t^2$ οπού a_Z η επιτάχυνση του άκρου Ζ του σχοινιού.

Το σχοινί που θα έχει τυλιχθεί προκύπτει από τη σχέση : $\boxed{x = \Delta x_{cm} - \Delta x_Z}$ (1)

Για την επιτάχυνση του σημείου Ζ (αφορά το σημείο του σχοινιού που έρχεται σε επαφή με το δίσκο το οποίο βρίσκεται κάτω από το κέντρο μάζας σε απόσταση r) από την αρχή της επαλληλίας :

$$a_Z = a_{\mu\varepsilon\tau(Z)} - a_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau(Z)} = a_\gamma \cdot R - \alpha_\gamma \cdot r = a_\gamma \cdot R - \alpha_\gamma \cdot \frac{R}{2} = a_{cm} - \frac{a_{cm}}{2} = \frac{a_{cm}}{2} \quad (2)$$

επειδή $a_Z = \frac{a_{cm}}{2}$ τότε και $\Delta x_Z = \frac{1}{2}\frac{a_{cm}}{2}\Delta t^2 = \frac{\Delta x_{cm}}{2}$

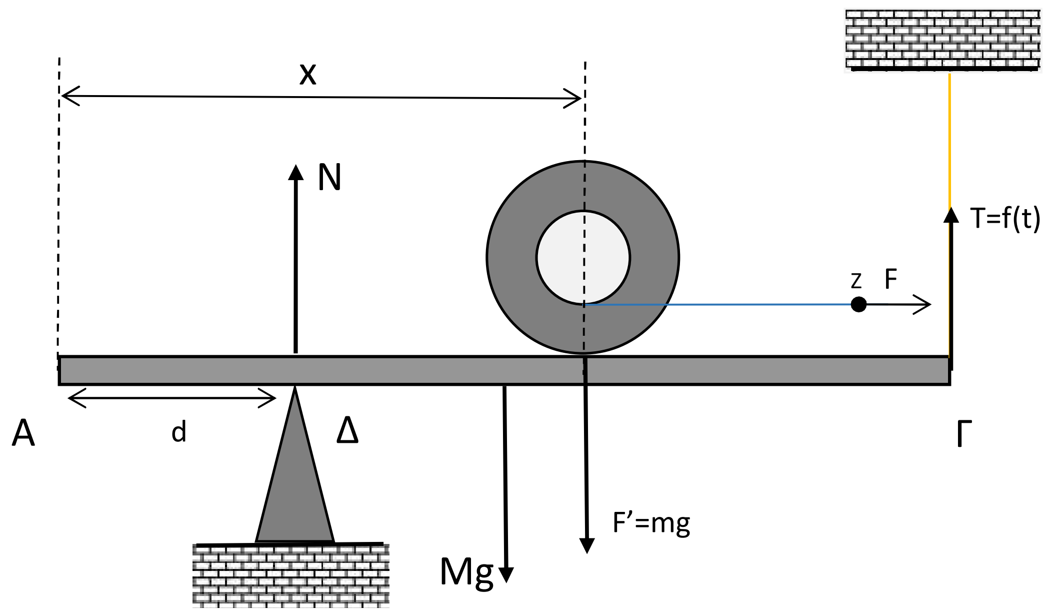
Από τη σχέση (1) : $x = \Delta x_{cm} - \frac{\Delta x_{cm}}{2} = 8m$

Δ4. Το κατακόρυφο νήμα σπάει την στιγμή που το κατώτερο σημείο του δίσκου φτάνει στο άκρο Γ της ράβδου. Η δύναμη F’ ασκείται στη ράβδο σε όλη τη διάρκεια κίνησης του δίσκου και τώρα ασκείται στο άκρο Γ.

Από την οριακή ισορροπία της ράβδου ισχύει Στ=0 ως προς το σημείο Δ.

$$\tau_{mg} + \tau_{Mg} + \tau_{\mathrm{T}} + \tau_{\mathrm{N}} = 0 \Leftrightarrow -mg\cdot(L-d) - Mg\cdot(\frac{L}{2}-d) + T_{\theta\rho}\cdot(L-d) + 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$T_{\theta\rho} = 50\mathrm{N}$$



Δ5. Σχεδιάζουμε τον δίσκο σε τυχαία θέση που απέχει $x = x_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm}\cdot t^2 = t^2$ από το άκρο Α. Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θέτουμε στην παραπάνω x=L οπότε

$$x = L = \frac{1}{2}a_{cm}\cdot t_{o\lambda}^2 \Leftrightarrow 16 = t_{o\lambda}^2 \Leftrightarrow t_{o\lambda} = 4s$$

Από την ισορροπία της ράβδου ισχύει Στ=0 ως προς το σημείο Δ.

$$\tau_{mg} + \tau_{Mg} + \tau_{\mathrm{T}} + \tau_{\mathrm{N}} = 0 \Leftrightarrow -mg\cdot(\mathrm{x}-d) - Mg\cdot(\frac{L}{2}-d) + T\cdot(L-d) + 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{mg\cdot(\mathrm{x}-d) - Mg\cdot(\frac{L}{2}-d)}{L-d} \Leftrightarrow T = \frac{30(x-4)+60(8-4)}{12} \Leftrightarrow T = 10 + 2{,}5x(SI)$$

Θέτουμε $x = x_{cm} = t^2$ οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι :
$T = 10 + 2,5 \cdot t^2 (SI)$ για $0 \le t \le 4s$