ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΚΥΡΙΑΚΗ 7 ΜΑΡΤΙΟΥ 2021

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a,β).

Μονάδες 7

Α2) Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Μονάδες 4

Α3) Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:
“ Για κάθε συνεχή συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, ισχύει: $f''(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ”.

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή ή ***Λάθος***, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι: $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\ x\neq 0$.

β) Κάθε συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν, υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.

δ) Αν για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν αντιστρέφεται, τότε υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^7+x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

Β1) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1", έχει μοναδική ρίζα το 1 και να βρείτε το πρόσημο των τιμών της.

Μονάδες 7

Β2) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 4

Έστω επιπλέον η συνάρτηση $g(x)=\ell n x,\ x>0$.

Β3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=(g\circ f)(x)$, έχει τύπο $h(x)=\ell n\left(x^7+x-2\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $(1,+\infty)$.

Μονάδες 6

Β4) Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της είναι το $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^3+\beta x^2-(4\alpha+1)x}{x^2-4},\ x\neq\pm 2$ και η ευθεία $y=x$, η οποία είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Γ1) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=0$.

Μονάδες 6

Για $\alpha=1$ και $\beta=0$:

Γ2) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

Γ3) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Γ4) Αν $\kappa\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-\kappa x^2-5x+4\kappa=0,\ x\in\mathbb{R}$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(1)=1$ και $x\cdot f'(x)=f(x)\cdot(x-1)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Αν $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x},\ x>0$:

Δ2) **α)** Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

β) Να λυθεί η εξίσωση $e^{f(x)}=e\cdot f(x),\ x>0$.

Μονάδες 4

Δ3) **α)** Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 3

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)-1\le f'(x)\cdot(x-1)$ για κάθε $x\ge 1$.

Μονάδες 4

Δ4) Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(f(x)-1\right)\cdot \ell n(x-1)\right]$.

Μονάδες 5

Σας ευχόμαστε επιτυχία!!