ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 21/2/2021

ΘΕΜΑ 1ο

Α) α) Σχολικό βιβλίο σελ. 60

β) Σχολικό βιβλίο σελ. 36

γ) i) $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

Β) α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Α) $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 =$

$\eta\mu^2\omega - 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega =$

$2\eta\mu^2\omega + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega = 2(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) = 2\cdot 1 = 2$

Β) α) $2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6},\ \ \kappa \in \mathbb{Z}$

β) Πρέπει να είναι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2},\ \ \kappa \in \mathbb{Z}$

(ή $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \ \kappa \in \mathbb{Z}$)

$\varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

Πρέπει να είναι $\pi < x < 3\pi \Leftrightarrow \pi < \kappa\pi - \frac{\pi}{4} < 3\pi \Leftrightarrow \pi + \frac{\pi}{4} < \kappa\pi < 3\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{5}{4}\pi < \kappa\pi < \frac{13}{4}\pi \Leftrightarrow \frac{5}{4} < \kappa < \frac{13}{4}$.

Αλλά $\kappa \in \mathbb{Z}$, οπότε $\kappa = 2$ ή $\kappa = 3$.

Για $\kappa = 2$: $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ και για $\kappa = 3$: $x = 3\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$

ΘΕΜΑ 3ο

Α) $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$

$\eta\mu(11\pi + x) = \eta\mu(10\pi + \pi + x) = \eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$

$\sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\sigma\varphi\frac{19\pi}{4} = \sigma\varphi\frac{16\pi + 3\pi}{4} = \sigma\varphi\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\varphi\frac{3\pi}{4} = \sigma\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{4} = -1$

$$\eta\mu\frac{41\pi}{2}=\eta\mu\frac{40\pi+\pi}{2}=\eta\mu\left(20\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}=1$$

Επομένως $f(x)=\dfrac{-\sigma\upsilon\nu x-1}{-\eta\mu x}\cdot\dfrac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1\cdot 1}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x}$

Β) Η f ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με

$\eta\mu x\neq 0\Leftrightarrow \eta\mu x\neq\eta\mu 0\Leftrightarrow x\neq 2\kappa\pi$ και $x\neq 2\kappa\pi+\pi \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

Γ) $f(x)=-\eta\mu x\Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x}=-\eta\mu x\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x+1=-\eta\mu^2 x\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x+1=-\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x-2=0$.

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x=y$ και η εξίσωση γίνεται: $y^2-y-2=0$

$\Delta=9$ και $y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}$, οπότε $y_1=2$ και $y_2=-1$

Για $y_1=2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=2$ αδύνατη, γιατί $-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$

Για $y_2=-1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-1$ αδύνατη, γιατί αν $\sigma\upsilon\nu x=-1$ τότε $\eta\mu x=0$ και από το ερώτημα Β) έχουμε $\eta\mu x\neq 0$

Άρα η εξίσωση $f(x)=-\eta\mu x$ είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 4ο

Α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$ και $\mathrm{A}(1,-2)$ έχουμε

$f(0)=0\Leftrightarrow -\lambda-3=0\Leftrightarrow\lambda=-3$ και

$f(1)=-2\Leftrightarrow -1-\kappa+3-3=-2\Leftrightarrow\kappa=1$

Άρα $f(x)=-x^5-x$

Β) Το πεδίο ορισμού της f είναι $\mathrm{A}=\mathbb{R}$. Οπότε

Για κάθε $x\in\mathrm{A}$ ισχύει $-x\in\mathrm{A}$ και

$f(-x)=-(-x)^5-(-x)=x^5+x=-f(x)$.

Άρα η f είναι περιττή.

Γ) Έστω $x_1,x_2\in\mathrm{A}=\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε:

$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1{}^5<x_2{}^5\Leftrightarrow -x_1{}^5>-x_2{}^5 \quad (1)$

$x_1<x_2\Leftrightarrow -x_1>-x_2 \quad (2)$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2):

$-x_1{}^5-x_1>-x_2{}^5-x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ) $x^5<-x+2\Leftrightarrow x^5+x<2\Leftrightarrow -x^5-x>-2\Leftrightarrow f(x)>-2 \quad (1)$

Παρατηρούμε ότι $f(1)=-1^5-1=-2$, οπότε

(1) $\Leftrightarrow f(x)>f(1)$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε $x<1$.