ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
(7 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2021)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Θεωρία (σχολικό βιβλίο σελ. 90).

β) α) Λάθος, γιατί $4+|x|=0 \Leftrightarrow |x|=-4$ αδύνατη.

β) Σωστό, γιατί $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 4=9-16=-7<0$.

γ) Λάθος, γιατί π.χ. $-2<1$, αλλά $(-2)^2>1^2$.

δ) Λάθος, γιατί $d(x,9)=|x-9|$.

ε) Σωστό (θεωρία).

ΘΕΜΑ 2ο

α) $|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow -3+2<x-2+2<3+2 \Leftrightarrow -1<x<5$.

β) Είναι $x>-1 \Leftrightarrow x+1>0$, οπότε $|x+1|=x+1$. Επίσης

$x<5 \Leftrightarrow x-5<0$, οπότε $|x-5|=-x+5$. Επομένως

$$K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}=\frac{x+1+(-x+5)}{3}=\frac{x+1-x+5}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) i) $$A+B=\frac{1}{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{1\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}+\frac{1\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}=\frac{10}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{10}{25-5}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}.$$

ii) $$A\cdot B=\frac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{1}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{25-5}=\frac{1}{20}.$$

β) Αφού οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι Α και Β, θα έχουμε:

$S=A+B=\dfrac{1}{2}$ και $P=A\cdot B=\dfrac{1}{20}$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{20}=0$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Έχουμε $\alpha = 1$, $\beta = -4$, $\gamma = 2-\lambda^2$. Οπότε

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(2-\lambda^2) = 16 - 8 + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 + 8 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) i) $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-4}{1} = 4$.

ii) $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{2-\lambda^2}{1} = 2-\lambda^2$.

γ) i) Έστω ότι $x_1 = 2+\sqrt{3}$.

Από το β) i) έχουμε $x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow 2+\sqrt{3}+x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4-2-\sqrt{3} \Leftrightarrow x_2 = 2-\sqrt{3}$.

ii) Από το β) ii) έχουμε $x_1 \cdot x_2 = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow 4-3 = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$.