ΚΥΡΙΑΚΗ 8 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών:
«Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν ισχύει ότι:

- η f είναι συνεχής στο [α, β],
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$».

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν μία συνεχής συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή **ή** είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ **ή** είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή ή ***Λάθος***, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για μία συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ ισχύουν $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 3$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = e$.

β) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι συνεχής στο x_0.

γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ, μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f, είναι διάστημα.

ε) Έστω f οποιαδήποτε συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 0}|f(x)| = +\infty$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί $\mathrm{A} = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{4-2\cdot\sqrt{x+3}}$ και $\mathrm{B} = \lim_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

Β1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς Α και Β.

Μονάδες 6

Β2. Αν $\mathrm{A}=2$ και $\mathrm{B}=1$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} Ax^2+4x+1, & x\geq 0 \\ \eta\mu 4x+B, & x<0 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση του πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)=x^5-1$ τέμνει την ευθεία $y=-x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο στο διάστημα (0,1).

Μονάδες 7

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6-\mathrm{B}x^5+x^2-\mathrm{A}x+f'(0)-3=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1), όπου Α και Β τα δεδομένα στο ερώτημα Β2.

Μονάδες 5

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη.

Μονάδες 6

Γ4. Έστω η συνάρτηση $g(x)=1-\ell\mathrm{n}\,x$

(i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$ και να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

(ii) Αν $1<\alpha<e-1$ να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1-\ell\mathrm{n}\,\alpha}{1-\ell\mathrm{n}(\alpha+1)}>\dfrac{\ell\mathrm{n}\,\alpha}{\ell\mathrm{n}(\alpha+1)}$.

Μονάδες 5

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- $x^2\cdot f^2(x)=\sigma\upsilon\nu^2x-2\sigma\upsilon\nu x+1$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ και
- $f(-\pi)=-f(\pi)=\dfrac{2}{\pi}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x\cdot f(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $[-\pi,0)$ και $(0,\pi]$.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[-\pi,0)$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\pi]$ και στη συνέχεια ότι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}, & x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi] \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(-\pi,0)$ τέτοιο, ώστε $3\sigma\upsilon\nu x_0-x_0=3$.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{f(x)}+\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

Μονάδες 6

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ