ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ:
Γ΄ ΕΠΑΛ 25/10/2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 31

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 13

Α3. 1-Σ, 2-Σ, 3-Σ, 4-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. i- $cf'(x)$, ii- $f'(x)+g'(x)$, iii- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$,

iv- $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, v- $f'(g(x))\cdot g'(x)$

Β2.

α) $f'(x)=3x^2+2x-3 \quad f'(1)=2$

β) $f''(x)=6x+2 \quad f''(-1)=-4$

γ) $3f'(x)-f''(x)-9x^2+11=0$
$\Leftrightarrow 3(3x^2+2x-3)-(6x+2)-9x^2+11=9x^2+6x-9-6x-2-9x^2+11=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

i) Για να βρω το πεδίο ορισμού πρέπει να ισχύουν: $x\geq 0$ και $x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$

Άρα $D_f=[0,4)\cup(4,+\infty)$

ii) $f(1)=\dfrac{\sqrt{1}-2}{1-4}=\dfrac{1}{3}$. Άρα διέρχεται από το σημείο Α$\left(1\,,\frac{1}{3}\right)$

iii) $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=0 \Rightarrow \sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$

Άρα τέμνει τον x'x στο Β(4,0)

$f(0)=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$. Άρα τέμνει τον y'y στο Γ($0,\dfrac{1}{2}$).

iv) $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0}$ Απροσδιόριστη μορφή.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{4}$$

Γ2.

α) $\lim_{x\to -1}\frac{|x|+\sqrt{x^2}}{2x} = \frac{1+1}{-2} = -1$

β) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1} = \frac{0}{0}$ Απροσδιόριστη μορφή.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-3) = -2$$

γ) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \frac{0}{0}$ Απροσδιόριστη μορφή.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{6}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

i) $f(x) = \frac{4x}{x^2-1}$

Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1$. Άρα $D_f = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

ii) $g(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

Πρέπει $x^2-5x+6\geq 0 \Rightarrow \Delta = 1$
$x_1 = 2, x_2 = 3$

Άρα πίνακα τιμών:

x	-∞ **2**	**3**	+∞
f (x)	+	-	+

και τελικά $D_g = (-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.

iii) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

Πρέπει: $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$. Άρα $D_h = (-\infty, 2)$

Δ2.

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x-5)(x-1)$

Άρα έχει ρίζες το 5 και το 1. Κάνουμε πίνακα μεταβολών:

x	-∞		**1**		**5**		+∞
f ΄(x)		+		-		+	
f (x)		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

i) H f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1]$ και $[5, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [1,5]

ii) Στο x=1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 4$

Στο x=5 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(5) = $-28

Δ3.

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \dfrac{0}{0}$ Απροσδιόριστη μορφή.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+7)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+7) = 8$$

ii) Για να είναι συνεχής στο x=1 , πρέπει : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Πρέπει $\lambda - 2 = 8 \Rightarrow \lambda = 10$.